Dr Candido Lima da Silva Dias.

E S T U D O S   S O B R E   A S
H O M O G R A F I A S

Tese de concurso à cadeira "Complementos de Geometria Analitica e Projetiva" da Escola Politecnica da Universidade de São Paulo.

S. Paulo.

- 1943 -

INTRODUÇÃO.

Escolhemos como assunto desta tese dois estudos sôbre as homografias. A teoria destas transformações forma um capítulo clássico da Geometria e sôbre o qual dificilmente podemos apresentar uma contribuição rigorosamente original. Entretanto, considerando atentamente, esta situação, percebemos que a dificuldade não se limita ao assunto escolhido mas é comum a qualquer argumento que, de alguma forma, possa ser enquadrado no programa da cadeira em concurso, o qual abrange sòmente a parte fundamental da Geometria.

Na Iª Parte, que constitue o primeiro estudo, nos ocupamos com a classificação das homografias no espaço projectivo de n dimensões. Este problema, no caso da recta, do plano e do espaço é estudado em qualquer bom tratado de Geometria Projectiva; entretanto, não conhecemos nenhum que o resolva aplicando meios puramente geométricos. Este interessante aspecto do problema já nos despertara interêsse quando lemos uma carta do matemático Stephan Cohn-Vossen a B. L. Van der Waerden que este, em homenagem ao primeiro, publicou em 1937 na revista "Mathematische Annalen" sob o título "Die Kollineationen des n-dimensionalen Raum".

Os principios do método de Cohn-Vossen constituem o fundamento do primeiro estudo desta tese. Acreditamos ter feito trabalho util, explicitando algumas demonstrações de Cohn-Vossen, dando uma forma mais geométrica a outras e num ponto importante, eliminando uma lacuna no trabalho de Cohn-Vossen, assinalada por Van der Waerden. Referimo-nos aos teoremas nºs. 19, 20, 21 e 24 desta tese.

Para facilitar a compreensão do método, julgamos oportuno introduzir no primeiro parágrafo algumas noções e teoremas do hiperespaço projectivo que serão utilisados com frequência.

No terceiro parágrafo da primeira parte fazemos uma aplicação do método desenvolvido à efectiva classificação das homografias do espaço projectivo ordinário. Esta aplicação não se encontra na nota de Cohn-Vossen, o qual, aliás, tem como objectivo a redução, das matrizes quadradas (correspondentes às homografias), à forma canónica de Jordan, problema êste que é equivalente ao que nos ocupa.

Feita a classificação, demonstramos no último parágrafo, a existencia de homografias correspondentes aos tipos classificados, limitando-nos àqueles cuja existência não é demonstrada nos tratados de Geometria Projectiva.

Outras questões deveriamos tratar, por exemplo, a da realidade das homografias. Entretanto, para não aumentar mais o tamanho da tese preferimos deixá-las para outra ocasião.

Na IIª parte, que constitue o segundo estudo, estudamos brevemente um outro aspecto das homografias e nos limitamos a projectividade sôbre uma recta. Em lugar de estudar as propriedades projectivas no sentido ordinário, fixamos a atenção directamente nas transformações, tomadas como elementos (pontos) de uma variedade (espaço) de três dimensões. Considerando êste espaço referido às coordenadas canónicas (correspondentes aos parâmetros canónicos do grupo projectivo), vemos que êle pode ser interpretado como um espaço métrico. Êste resultado é um caso particular da Geometria dos Grupos de Transformações, tèoria esta criada por Cartan e Schouten. O método seguido para precisar a natureza métrica do espaço, pelo que nos consta é original.

PRIMEIRA PARTE

Método Geometrico na Classificação das Homografias.

§ 1 - Espaço projectivo de n dimensões. Teoremas preliminares.

1.1 - O método geometrico que adoptaremos para obter a classificação das homografias é geral. Com isso queremos dizer que ele se aplica à classificação das colineações, na recta, no plano e no espaço projectivo ordinario assim como num espaço projectivo de n dimensões. Tendo em vista esse facto, acreditamos ser mais oportuno desenvolver os principios do método, relativamente ao espaço projectivo geral. O que perdemos em intuição é amplamente compensado pela generalidade dos resultados.

No inicio deste parágrafo daremos algumas noções e notações relativas ao espaço projectivo geral que será indicado com o simbolo S_n, onde o indice n se refere à dimensão do espaço.

A teoria sintética do S_n é devida substancialmente a Veronese[º].

Particularmente interessante e profunda a este respeito é a recente memória de Karl Menger e colaboradores, "New Foundations of Projective and Affine Geometry"[ºº],

---

[º] Veronese: Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee (Padova, 1891).

[ºº] Annals of Mathematics - Vol. 37, Nº 2. April 1936.

Menger assume como entes fundamentais: uma classe de entidades não definidas e duas operações não definidas denotadas por $+$ e $.$; as entidades da classe correspondem às partes lineares de um espaço e as operações $+$ e $.$, respectivamente as de projecção e secção.

Enviamos o leitor à citada Memória de Menger pelo que se refere aos axiomas, assim como, aos conceitos de ponto, iperplano, pontos independentes, iperplanos independentes, dimensão do espaço, espaços parciaes (relações de pertinencia) e dualidade.

Desejamos, entretanto, destacar explicitamente que um espaço projectivo ou linear de n dimensões está definido por $n+1$ de seus pontos $P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}$ que sejam <u>independentes</u>. Poderemos escrever:

$$S_n = P_1 + P_2 + \ldots + P_{n+1}$$

e diremos que o conjunto $[P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}]$ dos pontos $P_1, P_2, \ldots$ e P_{n+1} forma uma <u>base</u> do S_n. Se $[Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n+1}]$ é outra base do mesmo S_n seguirá:

$$P_1 + P_2 + \ldots + P_{n+1} = Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_{n+1}.$$

Dualmente, si $H_1, H_2, \ldots, H_{n+1}$ são $(n+1)$ iperplanos independentes do S_n, virá:

$$S_n = H_1 . H_2 . \ldots . H_{n+1} .$$

O espaço S_n pode ser considerado como espaço de iperplanos e muitas vezes o indicaremos, nestas circunstancias, com a notação $\sum_n$.

Os espaços parciaes (subordinados) do S_n (os S_m do S_n, com $m < n$) são definidos por $(m+1)$ pontos independentes, em particular, por $(m+1)$ pontos da base $P_1, P_2, \dots, P_{n+1}$.

Para indicar que um S_m ou mais geralmente um conjunto C qualquer de pontos pertence ao espaço S_n usaremos a seguinte notação:

$$S_m \subset S_n \quad \text{ou} \quad S_n \supset S_m$$
$$C \subset S_n \quad \text{ou} \quad S_n \supset C.$$

Se o conjunto C coincide com o espaço S_n escreveremos

$$C \equiv S_n .$$

O facto do conjunto C estar contido no S_n mas poder eventualmente coincidir com o proprio S_n será indicado com

$$C \subseteq S_n$$

Para indicar que um ponto P pertence a um es<u>paço</u> S_n ou a um conjunto C usaremos a notação

$$P \in S_n \qquad\qquad P \in C$$

Um S_{n-1} de um S_n é um <u>iperplano</u> do S_n.

Um S_1 é chamado <u>recta</u> assim como um S_2 é chamado <u>plano</u>.

No curso desta tese necessitaremos mais algumas noções sobre o espaço projectivo e tambem outros simbolos mas preferimos nos ocupar logo da demonstração de alguns teoremas gerais sobre o espaço projectivo que são imprescin diveis para a compreensão do parágrafo 2º.

Antes dos teoremas uma

Definição: Dados m espaços lineares S^1, S^2, ... e S^m chamamos intersecção ou produto desses m espaços, ao conjunto dos pontos comuns a esses m espaços.[º]

Indicaremos o conjunto ou espaço vazio, indiferentemente, com a notação V ou S_{-1}.

Usaremos sistemáticamente a notação

$$S^1.S^2. \dots .S^m$$

para indicar a intersecção desses m espaços.

Se esses m espaços não têm nenhum ponto em comum escreveremos:

$$S^1.S^2. \dots . S^m \equiv V.$$

Neste caso, diremos que os m espaços são independentes.

Relativamente a intersecção de dois espaços temos o seguinte:

Teorema 1 : "Um S_p e um S_q pertencentes a um mesmo S_n, têm, caso $p + q \geqslant n$, como intersecção um espaço linear S_d de dimensão $d \geqslant p + q - n$."

[º] Usaremos sistemáticamente a notação S^m, indice em cima, para indicar um espaço projectivo quando ele deve ser distinguido de outros espaços. Caso seja necessario explicitar a dimensão do espaço escreveremos S^m_n, o qual será um espaço projectivo de n dimensões. Outra observação: para simplificar, diremos simplesmente, daqui por diante, espaço em lugar de espaço linear ou projectivo o que não traz nenhum inconveniente na 1a. Parte desta tése.

Seja $[P_1, P_2, \ldots , P_{p+1}]$ uma base do espaço S_p e $[Q_1, Q_2, \ldots, Q_{q+1}]$ uma base do espaço S_q.

Dois casos e somente dois se apresentam:

1º - todos os pontos Q_i $(i = 1, 2, \ldots, q+1)$ pertencem ao espaço S_p;

2º - pelo menos um dos pontos Q_i não pertence ao espaço S_p.

No primeiro caso, o espaço S_q está contido no S_p $(S_q \subset S_p)$ e a intersecção dos dois espaços S_p e S_q é o proprio espaço S_q.

Se $n = p$ temos:

$$d = q = p + q - n.$$

Se $n > p$ temos:

$$d = q > p + q - n,$$

e o teorema enunciado, quando acontecer este primeiro caso, fica assim demonstrado.

No segundo caso, seja, por exemplo, Q_1 um ponto não pertencente ao S_p.

Formemos então o espaço S_{p+1} definido pela base $[P_1, P_2, \ldots ; P_{p+1}, Q_1]$. Novamente dois casos e somente dois se apresentam:

a) - S_q contido no S_{p+1};

b) - S_{p+1} não contem o S_q, isto é: um pelo menos dos restantes pontos $Q_2, \ldots ,Q_{q+1}$ não pertence ao S_{p+1}.

Para esclarecer o caso a) vejamos como pode ser gerado o espaço S_{p+1}. Tendo em vista a base do S_{p+1}

a_1) - S_q contido no S_{p+2}:

b_1) - S_{p+2} não contem o S_q, isto é, um pelo menos dos restantes pontos $Q_3,\ldots,Q_{q+1}$ não pertence ao S_{p+2}.

Tambem para esclarecer o caso a_1) vejamos como pode ser gerado o espaço S_{p+2}. Tendo em vista a base do S_{p+2} concluimos imediatamente ser o S_{p+2} gerado pelos S_2 (planos) definidos por Q_1, Q_2 e um ponto P do S_p. Com considerações semelhantes às desenvolvidas no caso a), concluimos que a cada um dos restantes pontos $Q_3, Q_4,\ldots,Q_{q+1}$ corresponde, respectivamente, os pontos $\bar{Q}_3, \bar{Q}_4,\ldots,\bar{Q}_{q+1}$ que são as intersecções dos planos $Q_1Q_2Q_3, Q_1Q_3Q_4,\ldots,Q_1Q_2Q_{q+1}$, respectivamente, com o espaço S_p, e são linearmente independentes. O espaço S_{q-2} determinado pelos pontos $\bar{Q}_3, \bar{Q}_4,\ldots, \bar{Q}_{q+1}$ é o espaço intersecção $S_p.S_q$. E' facil verificar (primeiro supondo $n=p+2$, e depois $n \quad p+2$) que

$$d = q - 2 \geqslant p + q - n,$$

e o teorema fica demonstrado tambem neste caso.

No caso b_1) poderiamos considerar, por exemplo, um ponto Q_3, da base do S_q e que não está no S_{p+2}. Com a base $[P_1, P_2, \ldots ,Q_1, Q_2, Q_3]$ formariamos um espaço S_{p+3}, em relação ao qual teriamos de novo dois e somente dois casos.

Este processo de formar os espaços S_{p+1}, S_{p+2}, S_{p+3}, etc., não é, evidentemente, indefinido. Com efeito, si no correr deste processo não encontrarmos um espaço que contenha o S_q, chegariamos finalmente ao espaço

$S_{p+q'}$ definido pela base $[P_1, P_2, \ldots, P_{p+1}, Q_1, Q_2, \ldots, Q_{q'}]$ no qual

$$p + q' = n.$$

Este espaço $S_{p+q'}$ coincide, evidentemente, com o espaço S_n e contem, portanto, o espaço S_q.

Fixando a atenção na base $[P_1, P_2, \ldots, P_{p+1}, Q_1, Q_2, \ldots, Q_{q'}]$ do espaço $S_{p+q'}$, vemos que ele pode ser considerado como gerado pelos espaços $S_{q'}$, definidos pela base $[Q_1, Q_2, \ldots, Q_{q'}, P]$, sendo P um ponto do S_p. Com considerações semelhantes às desenvolvidas nos casos anteriores, concluimos que a cada um dos restantes pontos $Q_{q'+1}, \ldots, Q_{q+1}$ corresponde, respectivamente, os pontos $\bar{Q}_{q'+1}, \ldots, \bar{Q}_{q+1}$, respectivamente unica intersecção dos espaços

$$[Q_1, Q_2, \ldots, Q_{q'}, Q_{q'+1}] \;,\; [Q_1, Q_2, \ldots, Q_{q'}, Q_{q'+2}] \;, \;\ldots\ldots$$

$$[Q_1, Q_2, \ldots, Q_{q'}, Q_{q+1}]$$

com o espaço S_p. Esses pontos estão na intersecção $S_p . S_q$ e são linearmente independentes. O espaço $S_{q-q'-1}$ determinado pelos pontos $\bar{Q}_{q'+1}, \ldots, \bar{Q}_{q+1}$ é o espaço intersecção $S_p . S_q$. Neste ultimo caso temos, portanto,

$$S_d \equiv S_{q-q'-1}$$

seguindo daí

$$d = q - q' - 1 = q - (n - p) - 1 = p + q - n - 1$$

$$\therefore$$

$$d > p + q - n$$

e o teorema [o] está verificado em qualquer hipótese

<u>Teorema 2</u>: "Um espaço S_p e um espaço S_q que têm um S_d na intersecção estão num S_m com

$$m \leqslant p + q - d."$$

O espaço S_d é definido por $d+1$ pontos independentes; para definir o S_p devemos acrescentar a esses $d+1$ pontos outros $p-d$, para se obter $p+1$ pontos independentes. Da mesma forma para se determinar o S_q devemos acrescentar aos $d+1$ pontos outros $q-d$ pontos. Obteremos assim ao todo $p+q-d+1$ pontos. Si todos estes pontos forem independentes eles determinarão um S_{p+q-d}, caso contrario, definirão um S_m com $m < p + q - d$. O espaço assim determinado contendo uma base do S_p e uma base do S_q contem estes dois espaços.

<u>Teorema 3</u>: "Um S_p e um S_q <u>independentes</u> estão num S_m com $m \leqslant p + q - 1$."

Tomemos $p+1$ pontos independentes do S_p e $q+1$ pontos independentes do S_q, teremos ao todo $p+q+2$ pontos. Se estes forem linearmente independentes, eles definirão um espaço S_{p+q+1}, caso contrario definirão um S_m com $m < p + q + 1$ e evidentemente este espaço S_m contem tanto o S_p como o S_q.

---

[o] Julgamos oportuno dar a demonstração completa deste teorema porque a sua demonstração é geralmente feita com meios analiticos. - Ver: B. L. Van der Waerden-Einführung in die Algebraische Geometrie e Bertini: Geometria Proiettiva degli iperspazi.

Completemos o significado destes dois teoremas com o

TEOREMA 4.

"Um S_p e um S_q cuja intersecção é um S_d (eventualmente vazia) estão num S_{p+q-d} (eventualmente S_{p+q+1}) univocamente definido."

Suponhamos em primeiro lugar que a intersecção S_d não seja vazia. Do teorema 2 segue que o S_p e o S_q estão num S_m com

$$m \leqslant p + q - d.$$

Por outro lado, do teorema 1 vem (estando o S_p e o S_q num S_m)

$$d \geqslant p + q - m \quad \therefore \quad m \geqslant p + q - d.$$

Das duas desigualdades verificadas pela dimensão do espaço S_m segue

$$m = p + q - d.$$

Evidentemente existe um unico S_m que contem o S_p e o S_q pois se existisse um outro S'_m, distinto do S_m, a intersecção do S_m e do S'_m conteria o S_p e o S_q e teria dimensão menor que m o que é impossivel.

Utilisando os teoremas 3 e 2 seguindo raciocinio semelhante demonstrariamos que quando

$$S_p . S_q \equiv V$$

os dois espaços S_p e S_q estão contidos num unico S_m

com

$$m = p + q + 1.$$

Ao espaço S_m, univocamente definido, chamamos, espaço soma ou união dos espaços S_p e S_q. Interpretando o espaço vazio S_{-1} como um espaço de dimensão -1 [o], poderemos enunciar o teorema 4 sob outra forma:

"Se dois espaços S_p e S_q têm um S_d como espaço intersecção e um S_m como espaço união então teremos a seguinte relação:

$$p + q = d + m."$$

Sob esta forma o teorema é devido a Grassmann.

Tendo presente que o espaço intersecção de dois espaços é obtido aplicando a operação de secção aos dois espaços e que esta operação pode ser aplicada a um numero qualquer de espaços e é associativa, é imediata a redução ao caso de dois espaços, da circunstancia de termos m $(m > 2)$ espaços $S^1, S^2, \ldots, S^m$. Com efeito, procuraremos a intersecção de S^1 com S^2, seja $\bar{S}^1$, depois a de $\bar{S}^1$ com S^3, etc., e finalmente a de $\bar{S}^{m-1}$ (intersecção dos espaços $S^1, S^2, \ldots, S^{m-1}$) com S^m. Considerações semelhantes se aplicam quanto à determinação do espaço união (operação de soma ou projecção) de n espaços.

---

[o] Partindo dos postulados de Menger, isto pode ser demonstrado. Ver trabalho citado pg. 467 e seguintes.

1.2 - Antes de terminar este parágrafo, desejamos precisar o conceito de dualidade, do qual já fizemos referencia. Lembremos que um S_p é incidente com um S_q, quando $S_p \subset S_q$ ou $S_q \subset S_p$.

Podemos enunciar o principio de dualidade no S_n como segue:

A qualquer figura composta de pontos e hiperplanos corresponde uma figura composta de hiperplanos e pontos que apresenta as mesmas relaçoẽs de incidencia da primeira figura.

Observamos que este principio assim como as considerações que seguem podem ser deduzidas dos axiomas da Geometria Projectiva.

Em particular, à figura S_n, espaço de pontos, corresponde a figura Σ_n formada de hiperplanos, chamada dual do S_n. A cada S_m (contido no S_n) corresponde um S_{n-m-1} e aos pontos do S_m correspondem os hiperplanos pelo S_{n-m-1}.

Se $S_p \subset S_q$ (S_p e S_q no S_n), segue $S_{n-q-1} \subset S_{n-p-1}$ na figura dual.

Em resumo: a relação de "estar incluido", de "pertencer" se inverte pela dualidade.

Como consequencia destas considerações segue que o principio de dualidade se estende e pode ser aplicado às figuras formadas com quaisquer espaços lineares S_p, S_q, ... Neste caso geral a dualidade faz corresponder a cada S_p um S_{n-p-1} e quando $S_q \subset S_p$ segue, pela dualidade,

$$S_{n-q-1} \supset S_{n-p-1},$$

sendo S_{n-q-1} o correspondente de S_q e S_{n-p-1} o de S_p.[º]

---

§ 2 - Decomposição de um espaço projectivo. Transformações projectivas. Espaços unidos. Decomposição de um espaço em relação à uma homografia.

2.1 - Suponhamos no espaço projectivo ordinario (um S_3), um plano S_2 e um ponto P_o não situado no plano S_2. Podemos considerar o espaço S_3 como gerado pelo plano S_2 e pelo ponto P_o, pois todo ponto P do S_3 está sobre uma recta definida por um ponto do S_2 e pelo ponto P_o e reciprocamente, todo ponto situado sobre uma recta assim definida, está no S_3. Para indicar essa possibilidade escreveremos:

$$S_3 = S_2 + P_o.^{ºº}$$

[º] Ver, sobre a dualidade no S_n, os dois livros já citados:- Van der Waerden pg. 7 e seguintes; Bertini - Capitulo II.

[ºº] Neste parágrafo indicaremos um espaço linear, quando não houver necessidade de acentuar a dimensão, simplesmente pela letra S.

O caso particular considerado, facilita-nos a compreensão do conceito geral de decomposição de um espaço linear S. Sejam $S^1, S^2, \ldots, S^s$, s espaços contidos no espaço R e independentes (ver 1.1). Sabemos pelo teorema 4 (e pelas considerações que o seguem) que os espaços $S^1, S^2, \ldots, S^s$, sendo independentes, eles pertencerão a um espaço de minima dimensão (espaço união) univocamente definido. Seja $\bar{S}$ esse espaço. Se tivermos $S \equiv \bar{S}$, diremos que o espaço R se decompõe nos espaços parciaes $S^1, S^2, \ldots, S^s$ ou tambem, que os espaços $S^1, S^2, \ldots, S^s$ geram o espaço S.

Diremos outrosim que os espaços $S^1, S^2, \ldots, S^s$ são componentes da decomposição do espaço S.

E' claro que o espaço R pode se decompor de diferentes modos, isto é: em espaços parciaes diferentes dos espaços $S^1, S^2, \ldots, S^s$.

No exemplo citado, o S_3 pode se decompor tambem em duas rectas S_1 e S_1', que não se encontram.

Os espaços componentes $S^1, S^2, \ldots, S^s$, de uma decomposição do espaço S, sendo espaços independentes, dizer que o espaço S é decomponivel, é o mesmo que dizer, do espaço S, que ele é a soma directa (soma de espaços sem pontos comuns) dos espaços $S^1, S^2, \ldots, S^s$.

Escreveremos então:

$$S = S^1 + S^2 + \ldots + S^s.$$

Lembrando que a operação $+$ é associativa, chamemos de S' ao espaço gerado pelos espaços $S^2, \ldots, S^s$, isto é:

$$S' = S^2 + S^3 + \ldots + S^s$$

segue então:

$$S = S^1 + S'.$$

Por outro lado, de

$$S = S^1 + S'$$

e de

$$S' = S^2 + S^3 + \ldots + S^s,$$

segue:

$$S = S^1 + S^2 + \ldots + S^s$$

Convem tambem observar o seguinte: se S_1, por exemplo, é tal que

$$S^1 = \bar{S}^1 + \bar{\bar{S}}^1 \qquad (1)$$

então, de

$$S = S^1 + S^2 + \ldots + S^s \qquad (2)$$

segue:

$$S = \bar{S}^1 + \bar{\bar{S}}^1 + S^2 + \ldots + S^s \qquad (3)$$

Inversamente de (3) e (2) segue a (1).

2.2 - Seja ϕ uma correspondencia biunivoca entre todos os pontos de um espaço S e todos os pontos de outro espaço S', isto é: uma correspondencia cujo dominio é o espaço S, e cujo co-dominio é o espaço S'.

A operação T que leva os pontos do espaço S nos pontos correspondentes do espaço S' chamamos de transformação T, que leva o espaço S no espaço S'. O espaço S pode coincidir com o espaço S' - diremos então de uma transformação T do espaço S em si mesmo.

Suponhamos este caso e seja $\bar{S}$ um espaço parcial contido no espaço S. A transformação T definida em S, <u>subordina</u> no espaço $\bar{S}$ uma transformação que pode ser do espaço $\bar{S}$ em si mesmo ou não. No primeiro caso diremos que o espaço parcial $\bar{S}$ é <u>invariante</u> em relação à transformação T ou que o espaço $\bar{S}$ é <u>unido</u>, relativamente à transformação T. O espaço $\bar{S}$ pode ser um ponto, uma recta, etc.; diremos então de um ponto unido, de uma recta unida, etc..

Suponhamos uma decomposição do espaço S, isto é:

$$S = S^1 + S^2 + \ldots + S^s$$

Se os espaços componentes $S^1, S^2, \ldots, S^s$, forem <u>espaços unidos</u> em relação à uma transformação T do espaço S em si mesmo, diremos que o espaço <u>S é decomponivel em relação à transformação T</u>. Sob outra forma podemos dizer: se o espaço R for soma directa de espaços unidos, ele é decomponivel em relação à transformação T, caso contrario, ele é <u>indecomponivel</u>.

A transformação identica ou a identidade é a transformação que faz cada ponto corresponder a si mesmo. Aqui todos os pontos são unidos.

2.3 - As transformações chamadas projectivas são particulares transformações T de um espaço S_n em outro espaço S'_n de mesma dimensão. A transformação T será projectiva se as duas condições seguintes forem satisfeitas:

1º) - a transformação T leva <u>qualquer</u> S_1 do primeiro espaço S_n num S'_1 do segundo espaço S'_n.

2º) - A correspondencia entre duas rectas S_1 e S'_1 correspondentes é sempre projectiva.[º]

Diremos de dois espaços ligados por uma transformação projectiva que eles são projectivos ou que ha uma correspondencia projectiva entre esses dois espaços.

Daqui por diante consideraremos exclusivamente transformações projectivas.

Temos o seguinte teorema:

<u>Teorema</u> <u>5</u> - "Se dois espaços S_n e S'_n são projectivos, a um S_i subordinado do espaço S_n, corresponde um espaço S'_i do segundo espaço.

Se um S_i está num S_j os correspondentes S'_i e S'_j conservam a mesma relação. A correspondencia entre S_i e S'_i é projectiva."

A demonstração deste teorema pode ser encontrada no livro de Bertini - pg. 56.

A correspondencia projectiva entre os espaços

[º] Assumimos conhecido o conceito de transformação projectiva ou correspondencia projectiva entre dois espaços S_1.

subordinados S_1 e S'_1 damos o nome de projectividade subordinada da projectividade entre S_n e S'_n.

A definição de projectividade pode ser dada entre um $\sum_n$ e um $\sum'_n$. Pode tambem ser estendida à correspondencia entre um S_n e um $\sum_n$ se nas condições 1) e 2) substituirmos S'_1 por $\sum'_1$. E' oportuna a introdução da seguinte nomenclatura: quando a correspondencia projectiva se dá entre dois espaços S_n e S'_n ou $\sum_n$ e $\sum'_n$ diremos que se trata de uma homografia ou colineação; se a correspondencia é entre um S_n e um $\sum'_n$ diremos que é uma reciprocidade ou correlação.

Convem completar o teorema 5 enunciando o seguinte

Teorema 6: "Uma projectividade entre dois espaços S_n induz entre os espaços ligados a esses espaços uma transformação que é tambem projectiva."

Para fixar este teorema basta recordar exemplos conhecidos do S_3. Sabemos que se existir entre dois S_3 uma projectividade, tomando no primeiro espaço uma estrela de raios, a essa estrela corresponderá no segundo espaço uma estrela de raios e essas duas estrelas são projectivas.

A estrela de raios é um espaço de duas dimensões ligado ao S_3. Outro exemplo temos considerando planos de rectas correspondentes nos dois espaços. Teremos necessidade de aplicar est teorema no caso em que o espaço ligado ao S_n é uma estrela cujo centro é um ponto P. Essa estrela é a totalidade das rectas, dos planos, etc., dos hiperplanos que passam pelo ponto P. Essa totalidade pode ser considerada como um espaço de (n-1) dimensões, no qual as rectas funcionam como hiperplanos e os hiperplanos como pontos (podendo ser o contrario se considerarmos esse espaço de (n-1) dimensões como um espaço Σ).

Nesta tese nós nos ocuparemos unicamente com as transformações projectivas de um espaço em si mesmo, isto é do caso em que $S'_n \equiv S_n$, (projectividade entre dois espaços superpostos).

Restringir-nos-emos, alem disso, às homografias ou colineações e falaremos sistematicamente de homografias ou colineações em lugar de transformações projectivas.

As noções desenvolvidas em 2.2 sobre os espaços unidos se aplicam evidentemente a este caso.

2.4 - Seja T uma homografia no espaço S_n. Um problema que surge naturalmente é o de saber se essa transformação admite ou não pontos unidos. Essa questão é respondida pelo seguinte

<u>Teorema de existencia</u> (7): "Toda homografia admite, pelo menos, um ponto unido."

A demonstração deste teorema, quando n=1, não é muito simples e está apoiada nos axiomas da ordem e da continuidade [º] (ou outros equivalentes).

[º] Consultar, por exemplo: Prof. Giacomo Albanese: Lezioni di Geometria Proiettiva - pg. 120 e seguintes.

Para $n = 2$, a demonstração depende de delicadas considerações de continuidade.[ºº]

O problema da existencia de um ponto unido nas transformações projectivas é um caso particular de um problema fundamental da topologia - existencia de um ponto fixo (unido) em relação à uma transformação contínua que opera numa variedade (as homografias são transformações continuas).

Preferimos não entrar em detalhes[ºº] e simplesmente admitir o teorema de existencia, já enunciado.

Outra questão importante, ligada aos pontos unidos de uma homografia, é a do numero de pontos unidos admitido por uma homografia. Temos a este respeito o seguinte

<u>Teorema</u> <u>fundamental</u> (8): "Se um espaço S_n é transformado homograficamente em si mesmo e existem $n+2$ pontos unidos que são independentes (não estão num hiperplano) $n+1$ a $n+1$, então a homografia é a <u>identidade</u>.

[º] Ver, p. ex.:

Severi: Geometria Proiettiva - pg. 259 e seguintes.

[ºº] Consultar, por exemplo, o livro classico de Seifert-Threlfall: Lehrbuch der Topologie - pag. 283 e seguintes.

Cohn-Vossen, no trabalho citado na introdução, considera a questão analiticamente, introduzindo coordenadas e escrevendo a equação secular que dá os pontos unidos e o problema recai no da existencia de uma raiz de uma equação algebrica. Evidentemente é um caminho pouco ortodoxo ... .

Este teorema é classico, a sua demonstração[º] é geometrica e julgamos inutil reproduzil-a.

<u>Teorema 9</u>: "Se uma homografia que opera num S_n possue um ponto unido, então ela tambem possue um hiperplano unido."

O teorema é verdadeiro para $n=2$. Vamos admitil-o verdadeiro para a dimensão $n-1$ e demonstrar que será então verdadeiro para a dimensão n.

Seja P o ponto unido (frequentemente deixaremos de dizer: em relação a uma homografia, o que está sempre subentendido). Consideremos a estrela de centro P. Essa estrela é um espaço de dimensão $(n-1)$ no qual os hiperplanos do S_n funcionam como pontos (ver 2.3 - pg. 18).

A transformação induzida sobre a estrela de centro P, admite um ponto unido, logo o espaço S_n admite um hiperplano unido que passa pelo ponto unido P.

Usaremos (com Cohn-Vossen) a notação F_{n-1} para indicar um hiperplano unido. De uma maneira geral F_i indicará um espaço unido de dimensão i.

Seja F_{n-1} o hiperplano unido cuja existencia acabamos de demonstrar. Esse hiperplano contendo o ponto P e sendo unido admitirá um F_{n-2} unido e que contem o ponto P. Por sua vez, o espaço F_{n-2} é unido e aplican-

---

[º] Consultar, por exemplo:
E. Bertini: Iperspªzi. pgs. 57 e 58.

do o teorema 9, demonstramos a existencia de um F_{n-3} unido e que contem o ponto P. Continuaremos este processo até atingir o espaço $F_o \equiv P$. Teremos, em definitivo, a seguinte sequencia de espaços unidos embutidos uns nos outros:

$$S_n \supset F_{n-1} \supset F_{n-2} \supset \cdots \supset F_r \supset \cdots \supset F_o$$

r sendo um numero entre 0 e n.

Supondo F_k um espaço unido do S_n e r um numero inteiro tal que

$$0 \leqslant r \leqslant k,$$

é evidente (aplicando o teorema 9) a existencia da sequencia de pespaços unidos

$$F_k \supset F_{k-1} \supset \cdots \supset F_r \supset \cdots \supset F_o.$$

Empregando o principio de dualidade concluimos imediatamente que cada F_r está num F_k.

<u>Teorema 10</u>: "Se uma homografia que opera num S_n admite dois pontos unidos, então ela admite dois hiperplanos unidos."

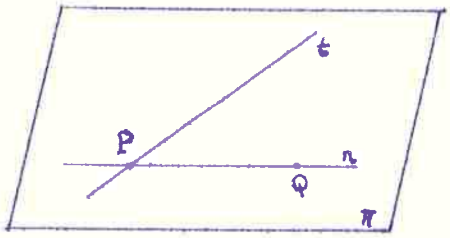
Para n=2 o teorema é verdadeiro[º]. Vamos demonstral-o para n=3. Suponhamos que o teorema não seja verdadeiro. Teremos então dois pontos unidos P e Q e

---

[º] Ver, p. ex:

<u>Severi</u>: Geometria Proiettiva - pg. 259 e seguintes.

um unico plano π unido. O teorema anterior diz que este plano passa pelos pontos P e Q.



A recta $PQ \equiv r$ é evidentemente unida e o plano π, admitindo dois pontos unidos (P e Q) admite duas rectas unidas. Uma dessas rectas é a recta r, a outra é uma recta t que passa, como podemos supor sem restrição, pelo ponto P. Consideremos a estrela de centro em P. Essa estrela admitindo duas rectas unidas p e t, admite dois planos unidos, um dos quais é o proprio plano π, o outro sendo um plano $\alpha \neq \pi$ e que passa pelo ponto P. Fica assim demonstrada a existencia de um segundo plano unido.

Suponhamos agora o teorema verdadeiro para a dimensão n-1, vamos demonstral-o para a dimensão n.

Suponhamos o teorema falso. Sejam P e Q os dois pontos unidos e F_{n-1} o hiperplano que passa então por esses dois pontos.

O hiperplano F_{n-1} admitirá duas rectas unidas distintas que poderemos supor, sem restrição, pertencentes ao espaço ponto unido P. Considerando a estrela de centro P (ver pg. 18), a qual é de dimensão n-1, vem imediatamente a existencia de um hiperplano unido, distinto do hiperplano F_{n-1}.

2.5 - Temos agora todos os elementos para demonstrar o principal teorema sobre a decomposição de um espaço em relação à uma homografia.

Trata-se do seguinte teorema:

Teorema 11: "Se o espaço S contem mais de um ponto unido, então S é decomponivel, e existe para cada ponto unido P uma decomposição

$$S = F + F' \quad \text{com} \quad F \supset P."$$

Demonstraremos, em primeiro lugar, o teorema quando $S \equiv S_1$ (recta).

Sejam P e Q dois pontos unidos distintos do S_1. Segue dahi que

$$S_1 \equiv P + Q$$

e o teorema está demonstrado, sendo aqui $F \equiv P$ e $F' \equiv Q$.

Estendamos o teorema para $S \equiv S_2$ (planos)

Sejam P e Q dois pontos unidos distintos do S_2. Sejam tambem r e r' duas rectas unidas (cuja existencia segue do teorema 10).

Duas possibilidades e somente duas podemos considerar:

1ª) - Uma, pelo menos, das duas rectas unidas, suponhamos a reta r, não passa pelo ponto P.

2ª) - As duas rectas r e r' passam pelo ponto P.

No primeiro caso, podemos escrever:

$$S_2 \equiv P + r$$

e esta decomposição demonstra o teorema, sendo aqui $F \equiv P$ e $F' \equiv r$.

No 2º caso fixemos a atenção no feixe de raios, cujo centro é o ponto unido P. Esse feixe de raios contem, pelo menos, duas rectas unidas, e a recta definida pelos pontos P e Q é certamente nesse feixe, unida.

Suponhamos essa reta (P Q) distinta da recta r. Na projetividade subordinada sobre a reta P Q, os pontos P e Q são dois pontos unidos distintos.

Podemos então escrever:

$$S_2 = r + Q \quad \text{(r contendo o ponto P).}$$

Fica assim demonstrado o teorema para este caso, sendo aqui $F \equiv r$ e $F' \equiv Q$.

Podemos agora atacar o caso geral, isto é: o caso de um espaço S qualquer, admitindo que se tenha demonstrado o teorema para os espaços cuja dimensão é menor que a dimensão de S.

Sejam P e Q dois pontos unidos distintos, cuja existencia é suposta. Segue a existencia de dois hiperplanos unidos distintos F_{n-1} e F'_{n-1}. (teorema 10).

Distinguiremos duas e somente duas possibilidades:

1ª) - Um dos hiperplanos, pelo menos, seja o hiperplano F_{n-1}, não passa pelo ponto P.

2ª) - Os dois hiperplanos, F_{n-1} e F'_{n-1}, passam pelo ponto P.

No primeiro caso podemos escrever:

$$S = P + F_{n-1}$$

(a dimensão de $P + F_{n-1}$ pelo teorema 4 é a mesma que a do espaço S), e o teorema fica demonstrado sendo

$$P \equiv F \quad \text{e} \quad F_{n-1} \equiv F'.$$

No 2º) caso consideremos a estrela (de raios) cujo centro é o ponto unido P. A homografia no espaço S induz nessa estrela uma projectividade (teorema 6) e sendo o ponto P unido, a estrela é transformada em si mesma.

Nessa estrela o raio PQ é evidentemente unido. A dimensão da estrela é menor que a dimensão do espaço S, logo podemos aplicar à essa estrela (que possue dois raios unidos, pois ela admite dois hiperplanos unidos F_{n-1} e F'_{n-1}) o teorema da decomposição e chamando a estrela de $\sum$ vem:

$$\sum = T + T',$$

o espaço T contendo o raio unido PQ.

Si considerarmos T e T' como espaços de pontos, esses espaços serão evidentemente unidos.

Por outro lado, todo ponto do espaço S está num raio da estrela $\sum$, logo podemos pensar o espaço S como gerado pelos espaços unidos T e T' os quais só admitem o ponto P (centro da estrela) como intersecção. Fixemos a atenção no espaço unido T. Esse espaço alem do ponto unido P contem o ponto unido Q e sendo de dimensão menor que a do espaço S, ele admite uma decomposição

$$T = U + U' \quad \text{com} \quad U \supset P.$$

Como o espaço U' nao contem P, chamando de F ao espaço <u>união</u> dos espaços U e T', vem:

$$S = F + U'$$

com

$$F \supset P, \quad e \quad F.U' = V$$

o que mostra a decomposição do espaço S, como exige o teorema.

<u>Teorema</u> <u>12</u>: "Se o espaço S contem um unico ponto unido, ele é indecomponivel."

Suponhamos o contrario, isto é:

$$S = S^1 + S^2.$$

O espaço S^1 sendo unido admite, pelo menos, um ponto unido, seja o ponto P_1. O mesmo quanto ao espaço S^2 e suponhamos que P_2 sejamum ponto unido desse espaço.

Portanto se S for decomponivel ele admite, pelo menos, dois pontos unidos distintos e dai o teorema enunciado.

<u>Teorema</u> <u>13</u>: - "Suponhamos o espaço S indecomponivel. Então para cada k, com

$$0 \leqslant k \leqslant n-1,$$

existe um unico F_k e estes satisfazem as seguintes relações de pertinencia:

$$S \supset F_{n-1} \supset F_{n-2} \supset \ldots \supset F_k \supset \ldots \supset F_o = P."$$

Com efeito, seja P o unico ponto unido de S. Pelo teorema 9, sabemos que existe um hiperplano unido F_{n-1} que passa pelo ponto P. Considerando o teorema 10 e raciocinando por dualidade é facil mostrar que o hiperplano unido F_{n-1} é o unico. O espaço F_{n-1}, por sua vez, admite um unico ponto unido, em relação à homografia induzida e portanto um unico F_{n-2} e assim por diante, até atingirmos o ponto P.

2.6 - Introduziremos, com Cohn-Vossen, uma notação que se mostrará muito oportuna daqui por diante.

Seja P um ponto unido do espaço S e F_k um espaço parcial unido e indecomponivel que contem o ponto P. Do teorema fundamental (8) sobre a decomposição segue que o ponto P é o unico ponto unido contido no espaço F_k. Para destacar este facto modificaremos a notação F_k e escreveremos $F_k(P)$.

Em determinadas ocasiões, quando não fôr necessario precisar a dimensão do espaço, escreveremos simplesmente F(P)

Suponhamos que o espaço S, em relação a uma homografia, admita um unico ponto unido e seja este o ponto P.

Podemos então escrever:

$$S \equiv F(P).$$

Se o espaço S admitir mais de um ponto unido, ele se decomporá em dois espaços unidos (teorema 8).

Cada um destes espaços, por sua vez, se admitir mais de um ponto unido, se decomporá.

Este processo de decomposição é evidentemente finito e teremos finalmente espaços indecomponiveis (com um unico ponto unido) cuja soma (directa) é o espaço S.

Escreveremos:

$$S = F(P_1) + F(P_2) + \dots + F(P_s) \qquad (D)$$

$P_1, P_2, \dots, P_s$ sendo os pontos unidos dos espaços unidos indecomponiveis.

Referiremos a este resultado, chamando-o de

Teorema 14: - "Existe para cada homografia, uma decomposição do espaço S em espaços unidos

$$S = F(P_1) + F(P_2) + \dots + F(P_s)."$$

Este teorema é muito importante pois associa a decomposição do espaço S em espaços unidos indecomponiveis a pontos unidos. Entretanto ele é incompleto, porque nada afirma quanto à unicidade ou arbitrariedade da decomposição.

O teorema é incompleto em dois sentidos. Em primeiro lugar quanto à dimensão dos espaços unidos indecomponiveis associados aos pontos unidos e em segundo lugar, quanto aos pontos unidos que podem ser associados à decomposição (D) do espaço S, pois podemos supor uma decomposição (D) do mesmo espaço S mas associada a outros pontos unidos, por exemplo:

$$S = F(P_1') + F(P_2') + \dots + F(P_t').$$

Uma ilustração deste facto temos na homologia plana. Seja π o plano, r o eixo, P_1 o centro, P_2 e P_3 dois pontos do eixo r.

Temos então a decomposição:

$$\pi = F_0(P_1) + F_0(P_2) + F_0(P_3).$$

P_2' e P_3' sendo outros dois pontos do eixo vem tambem:

$$\pi = F_0(P_1) + F_0(P_2') + F_0(P_3').$$

Nas proximas paginas procuraremos precisar o teorema 14, o que equivale a pesquisar a arbitrariedade da decomposição (D). Trataremos de precisal-o primeiramente quanto a dimensão dos espaços indecomponiveis. Neste sentido demonstraremos os seguintes teoremas:

Teorema 15 - "Se o ponto unido P não está no espaço unido F, então F e $F(P)$ não têm pontos em comum."

Com efeito, se F e $F(P)$ tivessem pontos em comum, estes pontos formariam um espaço, o qual seria evidentemente unido. Seja F esse espaço unido o qual, não contem o ponto P. F' sendo unido contem, pelo menos, um ponto unido, seja o ponto P'. Mas P' estando em F' está tambem em $F(P)$, o que é absurdo pois $F(P)$ é indecomponivel.

Teorema 16 - "Seja $S = F_k(P) + F$ uma decomposição do espaço S. Nessas condições não existe nenhum F(P) com dimensão superior a k."

Com efeito, do teorema 4 segue que a dimensão do espaço F é n-k-1. Do teorema anterior concluimos que F(P) e F nao devem ter pontos em comum.

Lembrando-nos novamente do teorema 4 segue que a dimensão de F(P) não pode ser superior a k.

Teorema 17 - "Se

$$S = F_k(P) + F = F'(P) + F',$$

então segue $k = \ell$."

Do teorema anterior vem contemporaneamente:

$$k \leqslant \ell \qquad \text{e} \qquad \ell \leqslant k$$

logo

$$k = \ell.$$

Este teorema afirma que a dimensão do espaço indecomponivel associado a um ponto unido é constante. Esse resultado permite associar a todo ponto unido um numero. Seguindo Cohn-Vossen indicaremos esse numero com a notação k(P).

2.7 - Neste numero daremos um conceito de ponto e hiperplano unidos associados.

Demonstraremos em primeiro lugar o seguinte

Teorema 18 - "A todo ponto unido P podemos associar um hiperplano unido."

Com efeito, podemos sempre supor que o ponto P pertença a uma decomposição (D), isto é:

$$S = F_k(P) + F(P_1) + \dots + F(P_s)$$

O teorema 13 diz que o espaço $F_k(P)$ contem um unico F_{k-1} unido.

Formemos o espaço:

$$F_{n-1} = F_{k-1} + F(P_1) + \dots + F(P_s).$$

Caso $k = 0$ definiremos:

$$F_{n-1} = F(P_1) + \dots + F(P_s).$$

E' facil verificar que este espaço é um hiperplano unido do espaço S, o que demonstra o teorema.

Aos hiperplanos F_{n-1}, definidos desta maneira, chamaremos hiperplanos unidos associados ao ponto unido P.

Evidentemente, os hiperplanos F_{n-1} associados ao ponto unido P pertencem a este ponto quando $k \neq 0$. Quando $k = 0$, o hiperplano associado a P não pertence a este ponto.

Teremos ocasião de completar este resultado.

2.8 - Neste numero estudaremos o grão de arbitrariedade da decomposição (D) em relação aos pontos unidos $P_1, P_2, \dots, P_s$.

Este estudo é feito por Cohn-Vossen em dois casos particulares - homografia com um numero finito de pontos unidos e homografia com um unico espaço linear de pontos unidos.[o]

---

[o] A demonstração geral sugerida por B. L. Van der Waerden em nota do trabalho de Cohn-Vossen não nos convem porque é analitica.

Conseguimos uma demonstração geometrica para qualquer caso e é esta a demonstração que exporemos. Preliminarmente alguns teoremas.

Teorema 19 - Seja

$$S = F(P_1) + F(P_2) + \ldots + F(P_s)$$

uma decomposição (D) do espaço S. Suponhamos que o espaço S contenha um espaço F de pontos unidos. Nessas condições, $(\ell+1)$ dos pontos $P_1, P_2, \ldots, P_s$ pertencem ao espaço F_ℓ, (exceptuando o caso da homografia identica)."

A demonstração deste teorema é facilitada pela demonstração do seguinte

Teorema 20 - Seja

$$S = F(P_1) + F(P_2) + \ldots + F(P_s)$$

uma decomposição (D) do espaço S. Suponhamos que o espaço S contenha um espaço F_ℓ de pontos unidos. Nessas condições um, pelo menos, dos pontos $P_1, P_2, \ldots, P_s$, pertence ao espaço F_ℓ, (exceptuando o caso da homografia identica)."

Supomos o teorema verdadeiro para os espaços cuja dimensão é menor que a dimensão do espaço S e vamos demonstrar que será verdadeiro tambem para o espaço S.

Tomemos $(\ell + 1)$ pontos independentes do F_ℓ, sejam os pontos

$$T_1, T_2, \ldots, T_{\ell+1}.$$

Se todos estes $(\ell+1)$ pontos forem dependentes do espaço

$$\bar{S} = F(P_2) + F(P_3) + \dots + F(P_s)$$

então

$$F_\ell \subset F(P_2) + F(P_3) + \dots + F(P_s) .$$

O espaço $\bar{S}$ sendo de dimensao menor que a do espaço S e F_ℓ estando nesta hipótese em S, segue que um dos pontos $P_2, P_3, \dots, P_s$ pertence a F_ℓ e o teorema estará demonstrado.

Suponhamos então que um, pelo menos, dos pontos $T_1, T_2, \dots, T_{\ell+1}$ não pertença ao espaço $\bar{S}$. Seja esse o ponto T_1, por exemplo.

Formemos o espaço

$$T_1 + F(P_2) + \dots + F(P_s).^{o}$$

Supomos que o espaço $F(P_1)$ seja o espaço de <u>maior dimensão</u> entre os espaços $F(P_1), F(P_2), \dots, F(P_s)$. Caso exista mais de um espaço nessas condiçoes, escolheremos um deles.

Este espaço encontrará certamente o espaço $F(P_1)$ e a intersecção só poderá ser um unico ponto U (teorema 1), o qual será <u>unido</u>.

Se o ponto $U \not\equiv P_1$, $F(P_1)$ conterá dois pontos unidos, o que é absurdo (ver 2.6 - pg. 28).

Vemos portanto que $U \equiv P_1$ e daí o espaço $T_1 + F(P_2) + \dots + F(P_s)$ passará pelo ponto P_1 e teremos

---

o E' o mesmo que projectar $\bar{S}$ do ponto T_1.

mos (sendo P_1 independente de $F(P_2), F(P_3), \ldots, F(P_s)$)

$$T_1 + F(P_2) + \ldots + F(P_s) = P_1 + F(P_2) + \ldots + F(P_s) .$$

Com raciocinio semelhante concluimos que os pontos $T_2, T_3, \ldots, T_{q+1}$ ou estao no espaço $\bar{S}$ ou no espaço

$$P_1 + F(P_2) + \ldots + F(P_s).$$

Observemos que temos evidentemente:

$$\bar{S} \subset P_1 + F(P_2) + \ldots + F(P_s).$$

Devemos agora distinguir dois e somente dois casos:

1º) - $k(P_1) > 0$;

2º) - $k(P_1) = 0$.

No 1º) caso, o espaço F_ℓ estará num espaço de dimensao menor (que a do espaço S) e portanto um dos pontos unidos $P_1, P_2, \ldots,$ ou P_s pertencerá ao espaço F_ℓ.

No 2º caso teremos:

$$k(P_1) = k(P_2) = \ldots = k(P_s) = 0$$

e a decomposição do espaço S será:

$$S = P_1 + P_2 + \ldots + P_s,$$

logo

$$s = n + 1.$$

Neste caso, se o espaço F_ℓ não coincidir com um dos pontos $P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}$, a homografia será a identidade (teorema 8) e o teorema 20 fica assim demonstrado.

<u>Teorema 21</u>: - "Seja

$$S = F(P_1) + F(P_2) + \dots + F(P_s)$$

uma decomposição (D) do espaço S. Suponhamos que o espaço S contenha um espaço F_ℓ de pontos unidos e que k entre os pontos $P_1, P_2, \dots, P_s$, com

$$1 \leq k \leq \ell$$

pertençam ao espaço F_ℓ. Nessas condições $(k+1)$, dentre os mesmos pontos, pertencerão ao espaço F_ℓ."

Faremos a demonstração aplicando o principio de indução completa, portanto, admitindo que ele seja verdadeiro para os espaços de dimensão inferior a do espaço S e demonstrando-o para este espaço. Convem demonstral-o diretamente para o espaço S_2.

Neste caso o espaço de pontos unidos F_ℓ pode ser:

1º) - um ponto;

2º) - uma recta F_1;

3º) - o proprio S_2.

O 1º caso equivale à demonstração do teorema 20.

No 3º caso teremos a homografia identica.

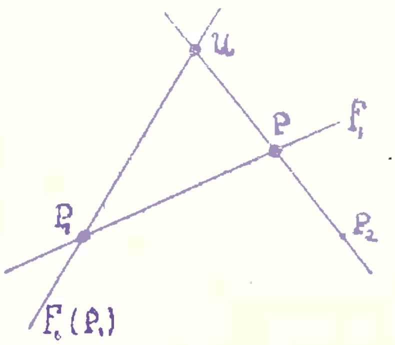
Para demonstrar o 2º caso basta considerar as possiveis decomposições (D) do espaço S_2 em dois espaços indecomponiveis e que são:

$$a - \quad S_2 = F_1(P_1) + F_0(P_2) :$$

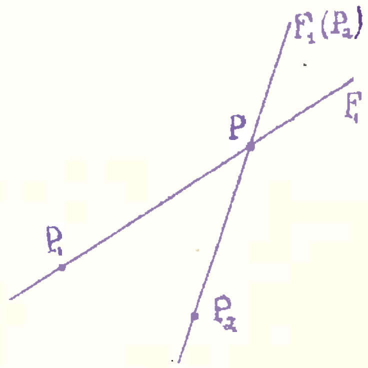
$$b - \quad S_2 = F_0(P_1) + F_1(P_2) ,$$

P_1 sendo um ponto da recta F_1 e P_2 um ponto unido não situado sobre a recta F_1.

No caso a, ligando P_2 a P (ponto generico sobre a recta F_1) teremos a intersecção U com $F_1(P_1)$, sendo $U \neq P_1$, o que é absurdo.



Caso a.



Caso b.

No caso b, $F_1(P_2)$ conterá $P \neq P_2$ o que é absurdo. A contradição provem de considerarmos um unico ponto P_1 sobre a recta F_1.

Os outros casos de composição do S_2 reduzem-se facilmente aos casos examinados.

Demonstraremos agora o teorema 21.

Se o espaço de pontos unidos F_ℓ pertence a um dos espaços unidos obtidos tomando (s-1) componentes da decomposição

$$S = F(P_1) + F(P_2) + \dots + F(P_s),$$

então o teorema será verdadeiro, pois o espaço F_ℓ estará, nestas circunstancias, situado num espaço unido de dimensão inferior à dimensão do espaço S.

Caso contrario, seja $F(P_s)$, por exemplo, o espaço componente de dimensão maxima (um deles, se houver mais de um com a dimensão maxima) e formemos o espaço:

$$P + F(P_1) + F(P_2) + \ldots + F(P_{s-1}),$$

P sendo um ponto do espaço F_ℓ.

Este espaço encontrará certamente o espaço $F(P_s)$ (teorema 1) e a intersecção será o proprio ponto P_s (teorema 1 e 2.6 pg. 28). Segue daí que o espaço F_ℓ se encontra no espaço

$$P_s + F(P_1) + F(P_2) + \ldots + F(P_{s-1}).$$

Podemos fazer duas e somente duas hipoteses:

1ª - $k(P_s) > 0$;

2ª - $k(P_s) = 0$.

Na 1ª hipotese, o espaço F_ℓ se encontrará num espaço de dimensão inferior a do espaço S e portanto o teorema será verdadeiro.

Na 2ª hipotese, teremos tambem:

$$k(P_1) = k(P_2) = \ldots = k(P_s) = 0,$$

seguindo daí:

$$s = n + 1$$

e

$$S = P_1 + P_2 + \ldots + P_{n+1}.$$

A verificação do teorema neste caso é simples. Basta observar que os espaços unidos de uma homografia não identica com a decomposição

$$S = P_1 + P_2 + \dots + P_{n+1},$$

se encontram entre as faces do (n+1)-edro cujos vertices são os pontos $P_1, P_2, \dots, P_{n+1}$ e portanto, sobre o F unido, se encontrarão, $\ell+1$ dos vertices $P_1, P_2, \dots, P_{n+1}$.

2.9 - Neste numero, utilisando os teoremas demonstrados no numero anterior poderemos finalmente estudar o gráo de arbitrariedade de uma decomposição (D) do espaço S. Procuraremos, em primeiro lugar, um caso particular que é aquele em que o <u>espaço S admite um unico espaço F_s de pontos unidos</u>. Este caso foi considerado por Cohn-Vossen.[9]

Seja:

$$S = F(P_1) + F(P_2) + \dots + F(P_s)$$

uma decomposição do espaço. O espaço:

$$F_{s-1} = P_1 + P_2 + \dots + P_s$$

será o espaço de pontos unidos (teorema 21, pg. 36). Suponhamos um ponto P pertencente ao espaço F_{s-1} mas <u>independente</u> de quaisquer (s-1) dentro os pontos $P_1, P_2, \dots, P_s$.

Ao ponto P está associado um numero $k(P)$ (ver pg. 31).

---

[9] Mathematische Annalen - 115 - pg. 82.

Vamos demonstrar o seguinte

<u>Teorema</u> -

$$k(P) = \min k(P_i) \qquad (i=1,2,\ldots,s).$$

Entendemos com a notação $\min k(P_i)$, o menor dos numeros $k(P_1), k(P_2), \ldots, k(P_s)$.

Para fixar, suponhamos que

$$\min k(P_i) = k(P_1) = r.$$

Temos então (teorema 14, pg. 29):

$$S = F_r(P_1) + G$$

$$S = F_k(P) + H$$

e seja $k > r$. Nestas condições, do teorema 1 segue que a intersecção dos espaços $F_k(P)$ e G não é vazia.

Por outro lado, se o ponto P não estiver no espaço unido G, segue do teorema 15 que a intersecção dos espaços $F_k(P)$ e G é <u>vazia</u>.

Em conclusão, se $k > r$, o ponto <u>unido P está em G</u>.

Mas,

$$G = F(P_2) + F(P_3) + \ldots + F(P_s)$$

e não existem pontos unidos em G fora do espaço

$$P_2 + P_3 + \ldots + P_s,$$

portanto

$$P \in (P_2 + P_3 + \ldots + P_s),$$

contra a hipotese feita de que P não depende dos pontos

$$P_2, P_3, \ldots, P_s.$$

Seja agora $k < r$. Então a intersecção dos espaços $F(P_1)$ e H não será vazia e de novo (teorema 15) segue:

$$P_1 \varepsilon H$$

e como P não depende dos pontos $P_2, \ldots, P_s$, estes ultimos estão tambem no espaço H. Mas nestas circunstancias teriamos:

$$P \varepsilon H$$

o que contradiz a decomposição

$$S = F_k(P) + H$$

Não podendo ser $k > r$ ou $k < r$ segue $k = r$, como queriamos demonstrar.

Teorema 23 - "Seja a seguinte decomposição (D) do espaço S

$$S = F(P_1) + F(P_2) + \ldots + F(P_s)$$

e suponhamos que o espaço

$$F_{s-1} = P_1 + P_2 + \ldots + P_s$$

seja o unico espaço de pontos unidos. Se um ponto P do espaço F_{s-1} for independente de quaisquer $(s-1)$ dentre os pontos $P_1, P_2, \ldots, P_s$ e se

$$\min k(P_i) = k(P_1),$$

teremos tambem a seguinte decomposição do espaço S:

$$S = F_k(P) + F(P_2) + \ldots + F(P_s)."$$

Escreveremos como na demonstração anterior

$$G = F(P_2) + F(P_3) + \ldots + F(P_s).$$

Pela demonstração anterior sabemos que $F_k(P)$ e G não têm pontos em comum e sendo a dimensão do espaço $F_k(P)$ a mesma que a do $F_k(P_1)$, segue do teorema 4 que $F_k(P)$ e G geram todo o espaço S.

Vimos a dimensão do espaço unido associado a um ponto generico do espaço F_{s-1}, iremos estudar agora a dimensão do espaço unido associado <u>a um ponto P dependente de t dentre os pontos</u> $P_1, P_2, \ldots, P_s$. Sejam estes os pontos $P_{i_1}, P_{i_2}, \ldots, P_{i_t}$. Se considerarmos o espaço $F(P_{i_1}) + F(P_{i_2}) + \ldots + F(P_{i_t})$, poderemos desenvolver, relativamente a este espaço, os raciocinios do teorema 22 referentes ao espaço S e demonstrariamos que

$$k(P) = \min k(P_{i_j}) \qquad (j = 1,2,\ldots,t)$$

Tendo em vista este resultado e o do teorema 23, poderemos fazer a seguinte distribuição dos pontos do espaço F_{s-1}. Em primeiro lugar destacamos os pontos P para os quaes

$$k(P) \ngtr r \qquad\qquad r = \min_{P \in F_{s-1}} k(P)$$

Estes pontos formam, como mostra a observação anterior, um espaço F'. Seja

$$r' = \min k(P) \quad \text{para} \quad P \in F'.$$

Destacaremos no espaço F' os pontos para os quais

$$k(P) > r'.$$

Estes pontos, por sua vez, formam um espaço F''. Continuaremos com este processo até atingirmos um espaço $F^{(\omega)}$ no qual $k(P)$ é constante e teremos, em definitivo, a seguinte cadeia de espaços embutidos uns nos outros:

$$F_{s-1} \supset F' \supset F'' \supset \ldots \supset F^{(\omega-1)} \supset F^{(\omega)}$$

Fixando a atenção no processo de formação destes espaços é facil certificarmo-nos que em cada espaço da cadeia, $k(P)$, para P nesse espaço, coincide com um $k(P_i)$. $(i = 1,2,\ldots,s)$.

Para obter uma base[o] para uma decomposição (D) do espaço procederemos do seguinte modo: tomaremos no espaço $F^{(\omega)}$ os pontos $Q_{q+1}, \ldots, Q_s$ que formam uma base deste espaço, em seguida acrescentaremos a estes pontos um certo numero de pontos independentes do espaço $F^{(\omega-1)}$ que estão no $F^{(\omega)}$ e teremos uma base do $F^{(\omega-1)}$: continuaremos com este processo até atingirmos o espaço F_{s-1} obtendo, em definitivo s pontos independentes

---

[o] Relativamente ao espaço F_{s-1}, esta base coincide com uma base do mesmo espaço, tomada no sentido dado em 1.1.

$$Q_1, Q_2, \ldots, Q_s.$$

À cada um destes pontos associaremos o espaço unido $F(Q_i)$ de dimensão maxima e é facil verificar (teorema 4) que cada um deles tem interseção vazia com a soma (directa) dos restantes. Como já observamos,

$$k(Q_i) = k(P_i) \qquad (i=1,2,\ldots,s)$$

e segue daí que o espaço

$$F(Q_1) + F(Q_2) + \ldots + F(Q_s)$$

é o proprio espaço S.

Com isso estabelecemos a arbitrariedade existente na escolha dos pontos de uma base para uma decomposição (D) do espaço S, no caso em que este espaço admite um unico espaço de pontos unidos.

Passaremos ao caso geral supondo que o espaço S possua q e somente q espaços de pontos unidos de dimensão maxima. Sejam estes os espaços

$$F_{s_1-1}, F_{s_2-1}, \ldots, F_{s_q-1}\,.$$ [o]

Do teorema 21, segue que em qualquer decomposição (D) do espaço S figurarão

---

[o] Os espaços F_{s_i-1} sendo espaços de pontos unidos de dimensão maxima, são evidentemente <u>independentes</u>. Para demonstral-o basta considerar um F_{s_1-1} e uma recta de pontos unidos que o encontre: vemos facilmente que o F_{s_1-1} estaria contido num F_{s_1} de pontos unidos, contra a hipotese.

$$s = s_1 + s_2 + \dots + s_q$$

espaços componentes indecomponiveis, correspondentes, por exemplo, aos pontos unidos $P_1, P_2, \dots, P_s$.

Sejam

$$P_1, P_2, \dots, P_{s_1}$$

os pontos que figuram no espaço F_{s_1-1} e consideremos o espaço <u>parcial</u>:

$$S^{s_1} = F(P_1) + F(P_2) + \dots + F(P_{s_1}).$$

Este espaço S^{s_1} é <u>unido</u> e contem um unico espaço de pontos unidos que é o espaço F_{s_1-1}.

Para este espaço S^{s_1}, baseando-nos no teorema 23 e considerações que o seguem, poderemos escolher uma base para a decomposição. Seja por exemplo

$$Q_1^1, Q_2^1, \dots, Q_{s_1}^1.$$

O mesmo podemos fazer, relativamente aos outros espaços unidos definidos como S^{s_1} e que indicaremos com as notações

$$S^{s_2}, S^{s_3}, \dots, S^{s_q}.$$

As <u>bases</u> para a decomposição (D) desses espaços (obtidos como a de S^{s_1}) serão respectivamente:

$$Q_1^2,\ Q_2^2,\ \dots,\ Q_{s_2}^2$$

$$Q_1^3,\ Q_2^3,\ \dots,Q_{s_3}^3$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$Q_1^q,\ Q_2^q,\ \dots,Q_{s_q}^q\ .$$

A decomposição

$$(E) \qquad S = S^{s_1} + S^{s_2} + \dots + S^{s_q}$$

é uma decomposição do espaço S em espaços parciaes, cada um dos quaes contem <u>um unico</u> espaço de pontos unidos.

<u>Vamos demonstrar a unicidade da decomposição (E)</u>.

Suponhamos a existencia de uma outra decomposição do tipo (E), isto é:

$$S = \bar{S}^{s_1} + \bar{S}^{s_2} + \dots + \bar{S}^{s_q}\ ,$$

$\bar{S}^{s_1}$, $\bar{S}^{s_2}$, ... , $\bar{S}^{s_q}$ contendo respectivamente os espaços de pontos unidos

$$F_{s_1-1},\ F_{s_2-1},\ \dots,F_{s_q-1}\ .$$

E' facil mostrar que o espaço

$$F(Q_1^1) + F(Q_2^1) + \dots + F(Q_{s_1}^1)$$

deve estar contido no espaço $\bar{S}^{s_1}$, isto é: $\bar{S}^{s_1} \supset S^{s_1}$.

Por outro lado, sendo

$$\bar{Q}_1^1,\ \bar{Q}_2^1,\ \dots,\bar{Q}_{s_1}^1$$

uma base da decomposição do espaço $\bar{S}^{s_1}$ segue

$$S^{S_1} \supset \bar{S}^{S_1}.$$

Das duas relações:

$$\bar{S}^{S_1} \supset S^{S_1}$$

$$\bar{S}^{S_1} \subset S^{S_1}$$

segue

$$\bar{S}^{S_1} = S^{S_1}$$

e demonstramos assim o

<u>Teorema</u> [o] <u>24</u> - O espaço S se decompõe de uma unica maneira em espaços parciaes unidos que possuem um unico espaço de pontos unidos, cada ponto unido estando num dos espaços parciaes.

Os teoremas demonstrados neste parágrafo permitem uma classificação completa das homografias em relação à configuração dos seus pontos unidos. No parágrafo seguinte faremos esta classificação no S_3 e no ultimo parágrafo desta parte demonstraremos a existencia das homografias classificadas.

---

[o] Este teorema não está demonstrado no citado trabalho de Cohn-Vossen.

§ 3 : Classificação das homografias no S_3.

3.1 - Neste parágrafo aplicaremos os teoremas sobre a decomposição (D) de um espaço em relação à homografia, que demonstramos no parágrafo anterior, à efectiva classificação das possiveis homografias que podem se apresentar no espaço projectivo ordinario, isto é: um S_3.

Esta classificação está baseada nas possiveis configurações do conjunto dos pontos unidos que o espaço pode apresentar em relação às homografias. O teorema 8, que é o teorema fundamental sobre as transformações projectivas, afirma que essa configuração dos pontos unidos é sempre uma configuração de espaços lineares (no caso do S_3, é formada de pontos, rectas, planos ou eventualmente todo o espaço). Por outro lado, o teorema 24, afirma que o espaço (em relação a uma homografia) se decompõe univocamente em tantos espaços parciaes quantos são os espaços independentes que formam a configuração dos pontos unidos.

Portanto, para fazer a efectiva classificação das possiveis homografias no S_3, devemos inicialmente enumerar as possiveis configurações de espaços independentes de pontos unidos.

Em primeiro lugar, quanto ao numero de espaços de pontos unidos independentes, podemos ter:

A - Quatro espaços de pontos unidos.
B - Três " " " "
C - Dois " " " "
D - Um espaço de pontos unidos.

Não consideramos a possibilidade de cinco ou mais espaços independentes de pontos unidos porque, neste caso, como consequencia do teorema fundamental (8), a homografia seria a identidade e preferimos colocar esta particular homografia no caso D.

Em seguida, relativamente à cada um dos quatro casos enumerados devemos examinar de quantas maneiras distintas podemos aplicar o teorema 24 sobre a decomposição univoca do espaço e de quantos modos podemos escolher uma base de decomposição (D).

Estudaremos separadamente os quatro casos iniciando pelo

Caso A.

Aqui se existir uma homografia, sendo os quatro espaços de pontos unidos independentes, trar-se-á evidentemente, quanto à configuração dos pontos unidos, de quatro pontos unidos que chamaremos Q_1, Q_2, Q_3 e Q_4, os quais sendo independentes darão à decomposição directa do S_3:

$$(\text{I}) \qquad S_3 = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4.$$

Teremos, portanto, neste caso:

$$F_o(Q_1) \equiv Q_1, \quad F_o(Q_2) \equiv Q_2, \quad F_o(Q_3) \equiv Q_3, \quad F_o(Q_4) \equiv Q_4,$$

e os quatro pontos Q_1, Q_2, Q_3 e Q_4 constituirão uma base da decomposição do S_3 em relação à homografia que chamaremos do tipo I. Este tipo de homografia não será especial, pois o espaço de dimensão minima que conterá todos os pontos unidos será o proprio S_3.

A existencia efectiva de uma homografia deste tipo será demonstrada no § 4, no qual nos ocuparemos tambem da construção das homografias correspondentes a todos os tipos que serão enumerados neste parágrafo.

Caso B.

Em correspondencia com a dimensão dos três espaços de pontos unidos, distinguiremos dois casos. Indicaremos os espaços de pontos unidos com a notação F_1^1, F_0^2, F_0^3, na qual o indice superior distingue um espaço do outro e o inferior dá a dimensão. Essa indicação será utilisada tambem nos outros casos, com as modificações requeridas quanto aos indices.

Os dois casos referidos são os seguinte

B_1 - Os espaços de pontos unidos são os espaços F_1^1, F_0^2 e F_0^3:

B_2 - " " " " " " " " F_0^1, F_0^2 e F_0^3.

Os três espaços de pontos unidos, estando no S_3 e sendo independentes não é possivel considerar outro sub-caso alem dos casos B_1 e B_2.

Vejamos em detalhe o

Caso B_1.

Levando em consideração a dimensão dos espaços de pontos unidos seguirá a seguinte decomposição do S_3:

$$S_3 = S_1 + S_0 + S_0'$$

$$S_1 \equiv F_1^1 \qquad S_0 \equiv F_0^2 \qquad S_0' \equiv F_0^3 .$$

Neste caso, essa será a <u>unica</u> decomposição do S_3 à que se refere o teorema 24.

Quanto à escolha de uma <u>base</u> para a decomposição (D) do S_3, é evidente que a base do F_o^2 parcial será o proprio F_o^2 que, por conveniencia, chamaremos tambem Q_3; o mesmo quanto ao espaço F_o^3 que chamaremos Q_4. Quanto ao F_1^1, sendo este de pontos unidos, qualquer que seja o seu ponto unido P virá $k(P) = 0$. Tendo presente o teorema 21 segue que, sendo Q_1 e Q_2 dois pontos distintos do F_1^1, uma base do F_1^1 será Q_1, Q_2.

Reportando-nos ao teorema 24 segue que os pontos Q_1, Q_2, Q_3 e Q_4 formarão uma <u>base</u> do S_3 e teremos aqui:

$$\text{II}\quad \left|\begin{array}{l} S_3 = F_o(Q_1) + F_o(Q_2) + F_o(Q_3) + F_o(Q_4) \\ \\ \qquad Q_1 \;\varepsilon\; F_1^1 \qquad Q_3 \;\varepsilon\; F_o^2 \\ \\ \qquad Q_2 \;\varepsilon\; F_1^1 \qquad Q_4 \;\varepsilon\; F_o^3 \end{array}\right.$$

Uma homografia com estas propriedades, se existir, <u>não será especial</u> e diremos homografia do <u>tipo II</u>.

<u>Caso B_2</u>.

Levando em consideração a dimensão dos espaços de pontos unidos haverá tambem aqui a seguinte unica decomposição do S_3 (baseada no teorema 24):

$$S_3 = S_1 + S_o + S_o^1,$$

com

$$S_1 \supset F_o^1, \qquad S_o \equiv F_o^2, \qquad S_o' \equiv F_o^3.$$

Quanto à escolha de uma base para a decomposição (D) do S_3 é evidente que os dois pontos

$$S_o \equiv F_o^2 \qquad e \qquad Q_3 \equiv F_o^3,$$

formarão base para F_o^2 e F_o^3, respectivamente.

Quanto à base do S_1, contendo este um unico ponto unido $F_o^1 \equiv Q_1$, Q_1 será a base do espaço unido S_1. Da decomposição

$$S_3 = S_1 + F_o^2 + F_o^3$$

segue, evidentemente:

$$\text{III} \quad \left| \begin{array}{l} S_3 = F_1(Q_1) + F_o(Q_2) + F_o(Q_3) \\ F_1(Q_1) \equiv S_1 \qquad F_o(Q_2) \equiv F_o^1 \\ \qquad F_o(Q_3) \equiv F_o^3 \end{array} \right.$$

A uma homografia que tenha as propriedades do caso B_2, diremos que é do <u>tipo III</u>. Evidentemente será <u>especial</u> pois seus pontos unidos estarão num mesmo plano do S_3.

Caso C.

Podemos distinguir neste caso, quanto à dimensão dos espaços de pontos unidos existentes, quatro e somente quatro possibilidades. São as seguintes:

C_1 - Os espaços de pontos unidos são os espaços F_o^1 e F_o^2;

C_2 - " " " " " " " " F_1^1 e F_o^2;

C_3 - " " " " " " " " F_1^1 e F_1^2;

C_4 - " " " " " " " " F_2^1 e F_o^2;

Caso C_1.

A decomposição directa do espaço S_3 em dois espaços parciaes, um contendo o F_o^1 e o outro contendo o F_o^2 é possivel de duas unicas maneiras. São as seguintes:

C_1' - O espaço S_3 se decompõe em duas rectas, isto é:

$$S_3 = S_1 + S_1'$$

com

$$S_1 \supset F_o^1 \qquad e \qquad S_1' \supset F_o^2.$$

C_2'' - O espaço S_3 se decompõe num plano e um ponto, isto é:

$$S_3 = S_2 + S_o,$$

com

$$S_2 \supset F_1^1 \qquad e \qquad S_o \equiv F_o^2.$$

Caso C_1'

A determinação de uma base para a decomposição (D) do S_3 é neste caso muito simples, pois cada um dos espaços S_1 e S_1' contêm um unico ponto unido. Chamando esses dois pontos unidos respectivamente de Q_1 e Q_2. $Q_1 \equiv F_o^1$ e $Q_2 \equiv F_o^2$ teremos a seguinte decomposição do S_3:

$$
\text{IV} \quad \left| \begin{array}{l} S_3 \equiv F_1(Q_1) + F_1(Q_2) \\ \\ F_1(Q_1) \equiv S_1 \supset F_o^1 \\ \\ F_1(Q_2) \equiv S_1' \supset F_o^2 \end{array} \right.
$$

Uma homografia com estas propriedades será <u>especial</u> e diremos homografia do <u>tipo IV</u>.

Caso C_1''

A determinação de uma base para a decomposição do S_3 é tambem aqui imediata, pois o espaço S_2 contem somente o ponto unido Q_1 e o espaço S_o evidentemente coincide com o ponto unido Q_2. Quanto à dimensão do espaço indecomponivel associado a Q_1 ela será certamente igual a dois, isto é:

$$k(Q_1) = 2.$$

Teremos portanto, neste caso, a seguinte decomposição (D) do S_3:

$$V \left| \begin{array}{l} S_3 = F_2(Q_1) + F_o(Q_2) \\ F_2(Q_1) \equiv S_2 \supset F_o^1 \\ F_o(Q_o) \equiv S_o \equiv F_o^2 \end{array} \right.$$

Uma homografia com estas propriedades será <u>especial</u> e diremos homografia do <u>tipo V</u>.

<u>Caso</u> $\underline{C_2}$.

Devemos, tambem aqui, considerar dois casos, quanto à decomposição do espaço S_3 em dois espaços parciaes que contêm respectivamente F_1^1 e F_o^2. São os seguintes:

C_2' - O espaço S_3 se decompõe num plano e um ponto, isto é:

$$S_3 = S_2 + S_o$$

com

$$S_2 \supset F_1^1 \qquad e \qquad S_o \equiv F_o^2.$$

C_2'' - O espaço S_3 se decompõe em duas rectas, isto é:

$$S_3 = S_1 + S_1'$$

com

$$S_1 \equiv F_1^1 \qquad e \qquad S_1' \supset F_o^2$$

Caso C_2'

Vamos em primeiro lugar nos ocupar da escolha de uma base para a decomposição (D) do S_2. Este S_2 contendo uma reta de pontos unidos terá uma base composta de dois pontos distintos Q_1 e Q_2 de F_1^1 e devemos ter

$$k(Q_1) = 1 \quad \text{e} \quad k(Q_2) = 0$$

pois todo ponto Γ de F_1^1 dependerá linearmente de Q_1 e Q_2.

A base do S_o será evidentemente o ponto

$$Q_3 \equiv F_o^2$$

Os pontos Q_1, Q_2 e Q_3 formarão uma base para a decomposição do S_3 e teremos a seguinte decomposição (D) do S_3:

$$\text{VI} \quad \left| \begin{array}{lll} S_3 = F_1(Q_1) + F_o(Q_2) + F_o(Q_3) & & \\ F_1(Q_1) \subset S_2 & & Q_1 \in F_1' \\ F_o(Q_2) \equiv Q_2 & & Q_2 \in F_2' \\ F_o(Q_3) \equiv Q_3 & & Q_3 \equiv F_o^2 \end{array} \right.$$

Uma homografia com estas propriedades se existir, será especial e diremos homografia do tipo VI.

Caso C_2''

Neste caso, o espaço decompondo-se em duas rectas, devemos procurar uma base para a recta S_1 e outra para a S_1'. Quanto à recta S_1 sendo

$$S_1 \equiv F_1^1$$

devemos ter

$$k(Q_1) = k(Q_2) = 0,$$

para dois pontos independentes Q_1 e Q_2 da recta S_1, os quaes formam portanto uma base para o S_1.

Quanto à recta S_2, contendo esta um unico ponto unido, seja este o ponto Q_3 e virá

$$k(Q_3) = 1.$$

Portanto os pontos Q_1, Q_2 e Q_3 formam uma base para adecomposição (D) do S_3 e teremos

$$\text{VII} \quad \left| \begin{array}{l} S_3 = F_0(Q_1) + F_0(Q_2) + F_1(Q_3) \\ \\ F_0(Q_1) \equiv Q_1 \, \varepsilon \, S_1 \\ \\ F_0(Q_2) \equiv Q_2 \, \varepsilon \, S_1 \\ \\ F_1(Q_3) \equiv S_1' \end{array} \right.$$

Uma homografia com estas propriedades, se existir, será <u>especial</u> e diremos homografia do <u>tipo VI</u>.

Caso C_3

Este caso é mais simples porque os proprios espaços de pontos unidos F_1^1 e F_1^2 serão os componentes da decomposição univoca (teorema 24) do espaço S_3. Teremos portanto

$$S_3 = S_1 + S_1'$$

sendo

$$S_1 \equiv F_1^1 \quad \text{e} \quad S_1' \equiv F_1^2 .$$

Quanto à base da decomposição do S_1 e do S_1' é facil verificar (tendo em vista os casos anteriores semelhantes) que sendo Q_1 e Q_2, Q_3 e Q_4 pares de pontos distintos respectivamente em S_1 e S_2 vem:

$$k(Q_1) = k(Q_2) = k(Q_3) = k(Q_4).$$

Portanto os pontos Q_1, Q_2, Q_3 e Q_4 formam uma base para a decomposição (D) do S_3 e teremos

$$\text{VIII} \left| \begin{array}{l} S_3 = F_o(Q_1) + F_o(Q_2) + F_o(Q_3) + F_o(Q_4) \\ F_o(Q_1) \equiv Q_1 \in S_1 \equiv F_1^1 \\ F_o(Q_2) \equiv Q_2 \in S_1 \equiv F_1^1 \\ F_o(Q_3) \equiv Q_3 \in S_1' \equiv F_1^2 \\ F_o(Q_4) \equiv Q_4 \in S_1' \equiv F_1^2 \end{array} \right.$$

Uma homografia com estas propriedades, se existir, <u>não será especial</u> e diremos homografia do <u>tipo VIII</u>.

Caso C_4

Este caso, como o C_3, é simples, porque, aqui tambem, os proprios espaços de pontos unidos F_2^1 e F_o^2 serão os componentes da decomposição univoca do espaço S_3. Teremos portanto

$$S_3 = S_2 + S_o$$

sendo

$$S_2 \equiv F_2^1 \qquad e \qquad S_o \equiv F_o^2.$$

Quanto à base da decomposição do S_2, sendo este de pontos unidos, devemos ter três pontos Q_1, Q_2 e Q_3 independentes. Qualquer outro ponto desse espaço sendo dependente dos pontos Q_1, Q_2 e Q_3 segue (teorema 22)

$$k(Q_1) = k(Q_2) = k(Q_3) = 0.$$

Quanto à base da decomposição do S_1, contendo este um unico ponto unido, seja o ponto Q_4, segue que este forma a base da decomposição do S_o.

Os pontos Q_1, Q_2, Q_3 e Q_4 formam uma base da decomposição (D) do S_3 e teremos

$$\text{IX} \left| \begin{array}{l} S_3 = F_o(Q_1) + F_o(Q_2) + F_o(Q_3) + F_o(Q_4) \\ \qquad F_o(Q_1) \equiv Q_1 \in S_2 \equiv F_2^1 \\ \qquad F_o(Q_2) \equiv Q_2 \in S_2 \equiv F_2^1 \\ \qquad F_o(Q_3) \equiv Q_3 \in S_2 = F_2^1 \\ \qquad F_o(Q_4) \equiv Q_4 \in S_o = F_o^2 \end{array} \right.$$

Uma homografia com estas propriedades, se existir, será especial e diremos homografia do tipo VIII.

Caso D

Podemos distinguir neste caso, quanto à dimensão do unico espaço de pontos unidos, quatro e somente quatro possibilidades. São as seguintes:

D_1 - O espaço de pontos unidos é um espaço F_o.
D_2 - " " " " " " " " F_1.
D_3 - " " " " " " " " F_2.
D_4 - " " " " " " " " F_3.

Para indicar o espaço de pontos unidos usamos aqui a letra F com um unico indice, que indica a dimensão desse espaço, porque não será necessario distinguir entre dois ou mais espaços de pontos unidos.

Caso D_1

Neste caso, assim como nos sucessivos devemos simplesmente fazer a aplicação do Teorema 23, isto é: precisar como deve ser a base de uma decomposição (D) do S_3, em relaçã à eventual homografia que admite um unico espaço de pontos unidos.

Chamando em D_1 de Q_1 ao unico ponto unido, evidentemente devemos ter

$$k(Q_1) = 3$$

e o ponto Q_1 formará uma base da decomposição (D) do S_3. Teremos então:

$$X \quad | \quad S_3 = F_3(Q_1)$$

Uma homografia, como a descrita, se existir, será evidentemente <u>especial</u> e diremos homografia do <u>tipo</u> <u>X</u>.

<u>Caso D_2</u>

Sejam Q_1 e Q_2 dois pontos independentes da recta de pontos unidos F_1 e taes que

$$S = F(Q_1) + F(Q_2).$$

Aplicando o teorema 22, dois casos poderão se apresentar:

$$D_2' - k(Q_1) = k(Q_2) = 1.$$

$$D_2'' - k(Q_1) = 2; \; k(Q_2) = 0.$$

Evidentemente não será possivel outro caso.

<u>Caso D_2'</u>

Neste caso, os dois pontos Q_1 e Q_2 formarão uma base da decomposição (D) do S_3 e teremos:

$$\text{XI} \quad \left|\begin{array}{l} S_3 = F_1(Q_1) + F_1(Q_2) \\ Q_1 \, \varepsilon \, F_1 \\ Q_2 \, \varepsilon \, F_2 \end{array}\right.$$

Se existir uma homografia com estas propriedades, ela será evidentemente especial e a chamaremos homografia tipo XI.

Caso D_2''

Neste caso, os dois pontos Q_1 e Q_2 formarão uma base da decomposição (D) do S_3 e teremos:

$$\text{XII} \quad \left|\begin{array}{l} S_3 = F_2(Q_1) + F_0(Q_2) \\ Q_1 \, \varepsilon \, F_1 \\ Q_2 \, \varepsilon \, F_2 \end{array}\right.$$

Se existir uma homografia com estas propriedades, ela tambem será especial e a chamaremos homografia do tipo XII.

Caso D_3

Sejam Q_1, Q_2, e Q_3, três pontos independentes do plano de pontos unidos F_2 e taes que:

$$S_3 = F(Q_1) + F(Q_2) + F(Q_3).$$

$F(Q_1)$, $F(Q_2)$ e $F(Q_3)$ gerando todo o espaço S_3 devemos ter:

$$k(Q_1) = 1, \qquad k(Q_2) = 0, \qquad k(Q_3) = 0.$$

Evidentemente (teorema 22), em todo o plano F_1, só existirá um ponto Q com $k(Q) = 1$.

Temos portanto a seguinte decomposição (D) do espaço S_3:

$$\text{XIII} \left| \begin{array}{l} S_3 = F_1(Q_1) + F_0(Q_2) + F_0(Q_3) \\ \qquad Q_1 \in F_1 \\ \qquad Q_2 \in F_1 \\ \qquad Q_3 \in F_1 \end{array} \right.$$

Uma homografia como a descrita, se existir, será <u>especial</u> e diremos homografia do <u>tipo XIII</u>.

<u>Caso D_4</u>

Neste caso temos evidentemente a <u>homografia identica</u> e <u>quaisquer quatro pontos independentes</u> Q_1, Q_2, Q_3 e Q_4 <u>servem de base para uma decomposição (D) do espaço</u> S_3. Esta homografia será chamada homografia do tipo XIV. Não é possivel nenhum outro tipo de homografia.

§ 4 - Construção das homografias.

4.1 - Neste parágrafo, para sermos completos, deveriamos demonstrar a existencia de homografias correspondentes a cada um dos catorze tipos classificados no parágrafo anterior.

Julgamos, entretanto, dispensavel a demonstração da existencia das homografias dos tipos: I (homografia geral), II (homografia axial não especial hiperbolica), VI (homografia axial especial hiperbolica), VII (homografia axial não especial parabolica), VII (homografia biaxial não especial), IX (homologia não especial), XI (homografia biaxial especial), XII (homografia axial especial parabolica), XIII (homologia especial), XIV (homografia identica). Assim o fazemos porque as homografias que acabamos de citar, são estudadas com detalhe, sob o ponto de vista geometrico, em livros bastante conhecidos.[º]

Ocupar-nos-emos portanto somente com a existencia de homografias correspondentes aos tipos: III, IV, V, X.

Nas demonstrações que vamos fazer, pressupomos conhecidas as construções das projectividades entre formas de primeira e segunda especies que necessitarmos.

[º] Ver, por exemplo:

Comessatti - Lezioni di Geometria Analitica e Proiettiva. Parte Seconda, pg. 289 e seguintes.

Severi - Geometria Proiettiva, pg. 323 e seguintes.

Ciani - Lezioni di Geometria Proiettiva e Analitica, pg. 583 e seguintes.

Convem enunciar, em primeiro lugar, o seguinte teorema[º], que entrará de maneira essencial em todas as demonstrações que seguem.

Teorema A - Seja num S_3 os planos α e β e em outro S_3' os planos α' e β'. Suponhamos estabelecida uma correspondencia projectiva, entre os planos α e α' e outra correspondencia tambem projectiva, entre os planos β e β'. Impomos a estas duas correspondencias a seguinte restrição: à recta r intersecção de α e β corresponde a reta r' intersecção de α' e β', tanto na correspondencia entre α e α', como na correspondencia entre β e β'. Nestas condições, a correspondencia entre os planos α e α', β e β', pode ser estendida numa correspondencia projectiva entre os espaços S_3 e S_3'.

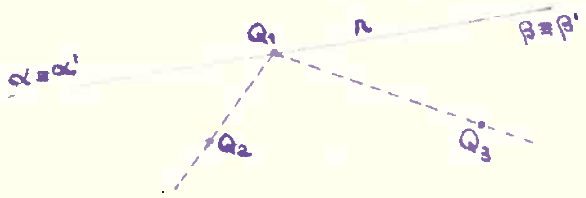
[º] Este teorema, assim como as demonstrações de existencia que seguem, são em suas linhas geraes, as que o prof. G. Albanese desenvolvia no seu curso da Faculdade de Filosofia Ciencias e Letras da Universidade de S. Paulo. O autor desta tese não conseguiu os apontamentos deste curso e não pode, portanto, garantir que as referidas demonstrações sejam exatamente as desenvolvidas no curso do Prof. G. Albanese.

A demonstração deste teorema é relativamente simples, dispensamos, portanto, de fazel-a.

Utilisaremos nas demonstrações seguintes dois casos particulares deste teorema que são: 1º) - o plano α coincidente com α' e o plano β coincidente com o plano β' : 2º) - o plano α não coincidente com α' , mas os planos β e β' coincidentes.

4.2: <u>Construção de uma homografia do tipo III</u> - Temos aqui a seguinte decomposição (D) do espaço S_3:

$$S_3 = F_1(Q_1) + F_o(Q_2) + F_o(Q_3).$$



$F_1(Q_1) \equiv r$ recta unida associada ao ponto Q_1.

As retas Q_1Q_2, Q_1Q_3, e Q_2Q_4 serão unidas, assim como os planos $Q_1Q_2Q_3$, Q_2r, Q_3r.

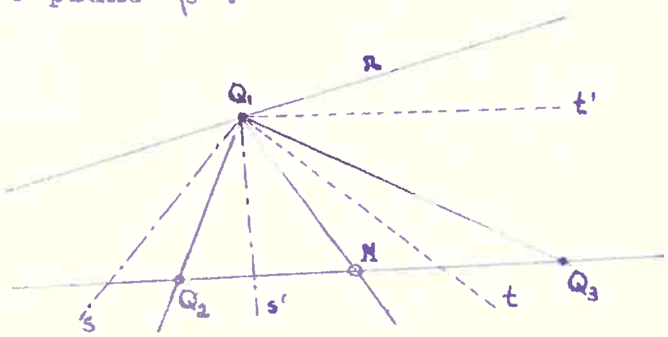
Para aplicar o teorema A consideraremos:

$$\alpha \equiv Q_2\, r \equiv \alpha'$$

$$\beta \equiv Q_3\, r \equiv \beta' ,$$

e definiremos entre α e α' uma projectividade que admita como pontos unidos os pontos Q_1 e Q_2 e associada a Q_1 a recta r, sobre a qual subordina uma projectividade parabolica; entre β e β' (coincidentes) definiremos tambem uma projectividade do mesmo tipo e que subordina sobre a recta r a <u>mesma</u> projectividade parabolica. Oportunamente imporemos restrição na projectividade entre β e β'.

Aplicando então o teorema A, teremos uma homografia estendida a todo o espaço. Vamos demonstrar que esta homografia é, efetivamente, uma homografia do tipo III. A homografia definida pelo teorema A não admite ponto unido distinto dos pontos Q_1, Q_2 e Q_3. Com efeito, supondo um ponto M unido, não situado sobre a recta unida Q_2Q_3, ligando-o ao ponto Q_2 teriamos um ponto unido sobre o plano $r\,Q_3 \equiv \beta$, o que é absurdo. Se o ponto unido M estiver sobre a recta Q_2Q_3, esta será uma recta de pontos unidos. Vamos demonstrar que precisando oportunamente a projectividade entre β e β', é absurdo supor que um ponto determinado M da reta Q_2Q_3 seja unido. Supondo-o unido consideremos um plano que passa pelos pontos M e Q_1. Sejam s e t os traços deste plano, respectivamente, nos planos α e β. Seja s' o traço com α' do plano homologo ao M s. O correspondente do traço t no plano β, será a intersecção do plano M s' com o plano β.



Por outro lado, t e t' são raios correspondentes na projectividade subordinada no feixe de raios de centro Q_1 no plano β. Mas a projectividade sobre o feixe de centro Q_1 e situado no plano β , pode ser determinada de tal maneira que ao raio t corresponda o raio $\bar{t}$, distinto de t'. Determinada a projectividade nesse feixe dessa maneira, estará precisada a projectividade entre β e β'. Assim determinada a projectividade entre β e β' , é absurdo supor que o ponto M seja unido. Em definitvo a homografia definida pelo teorema A admite três e somente três pontos unidos. E' facil mostrar que os espaços indecomponiveis associados aos pontos Q_2 e Q_3 são de dimensão zero e que portanto esta homografia admite a decomposição

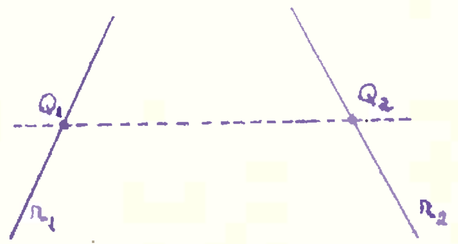
$$S_3 = F_1(Q_1) + F_0(Q_2) + F_0(Q_3),$$

com o que fica demonstrada a existencia de uma homografia do tipo III.

4.3 - <u>Construção de uma homografia do tipo IV</u> - A decomposição (D) do espaço é aqui:

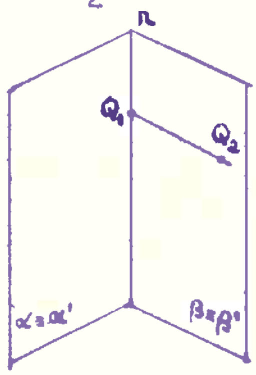
$$S_3 = F_1(Q_1) + F_1(Q_2).$$

Para maior comodidade indicaremos $F_1(Q_1)$ e $F_2(Q_2)$, respectivamente, por r_1 e r_2.



As rectas r_1 e r_2 devem ser evidentemente reversas, a recta $Q_1 Q_2 \equiv r$ unida e os planos determinados, respectivamente, pelas rectas r, r_1 e r, r_2 são tambem unidos.

Aplicaremos aqui o teorema A no caso em que $\alpha \equiv \alpha'$ e $\beta \equiv \beta'$. Tomando como plano α o plano determinado pelas rectas r e r_1 que se encontram em Q_1, como plano β o plano determinado pelas rectas r e r_2 que se encontram no ponto Q_2.



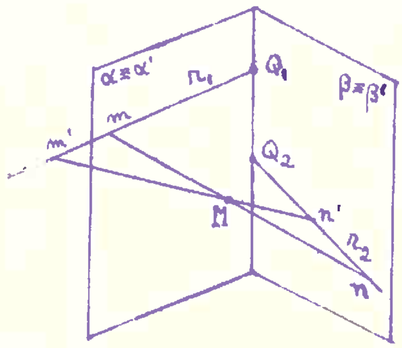
Determinaremos entre α e α' uma projectividade que admita os dois pontos unidos Q_1 e Q_2 e a recta unida r_1 que passa por Q_1. Entre β e β' uma projectividade que admite Q_1 e Q_2 como pontos unidos e a recta r_2 que passa por Q_2 como recta unida. Ambas determinando sobre a recta Q_1Q_2 a mesma projectividade hiperbolica. A projectividade estendida ao espaço, pelo teorema A, não pode admitir pontos unidos alem dos pontos Q_1 e Q_2. Basta considerar o caso de um ponto unido no espaço. Consideremos a recta que passa por M e apoiada sobre as rectas r_1 e r_2. Se o ponto M fosse unido a correspondente desta recta seria uma recta que passa pelo mesmo ponto M e que se apoia tambem nas duas rectas r_1 e r_2, o que é absurdo porque senão as duas rectas r_1 e r_2 estariam num mesmo plano.

Concluimos assim que a projectividade estendida ao espaço, admite unicamente dois pontos unidos, será portanto, do tipo IV ou do tipo V. E' facil excluir que ela seja do tipo V, porque neste caso, o espaço indecomponivel associado ao ponto Q_1 seria um plano que não passa por Q_2. Este plano daria como intersecção com o plano β , uma recta unida que passa por Q_1 e é distinta da recta Q_1Q_2, o que é absurdo. Em definitvo, precisada a projectividade entre α e α' , assim como entre β e β', a projectividade estendida ao espaço, aplicando ao teorema A, é efetivamente do tipo IV.

4.4 - Construção de uma homografia do tipo V - A decomposição do espaço é aqui

$$S_3 = F_2(Q_1) + F_0(Q_2).$$

Para maior comodidade indicaremos o plano $F_2(Q_1)$ com a letra π . Sobre o plano $F_2(Q_1)$ haverá uma recta unida que chamaremos r. Para aplicar o teorema A, tomaremos o plano π como plano α , coincidente com α'; como plano β o plano rQ_2, suporemos tambem β' coincidente com β .



Entre α e α' definiremos uma projectividade que admita como elementos unidos somente o ponto Q_1 e a recta r. Entre β e β' uma projectividade que admita como elementos unidos os pontos Q_1 e Q_2 e a recta r que passa por Q_1; as duas projectividades subordinando sobre a recta r uma mesma projectividade parabolica.

As projectividades definidas entre α e α' por um lado e entre β e β' por outro - ambas subordinando sobre a intersecção r uma mesma projectividade parabolica permitem a aplicação do teorema A e portanto a extensão da correspondencia a uma homografia no espaço. Digo que esta transformação não admite ponto unido distinto dos pontos Q_1 e Q_2. Basta considerar a possibilidade de um ponto unido no espaço, seja o ponto M. Se esse ponto existisse, o plano $Q_1 Q_2 M$ seria unido e sua intersecção com o plano $\pi \equiv \beta$ daria um raio unido pelo ponto Q_1, o que é absurdo, pois a projectividade sobre o feixe de raios com o centro em Q_1 é parabolica. A projectividade estendida ao espaço, admitindo dois e somente dois pontos unidos é do tipo IV ou V. Entretanto ela não pode ser do tipo IV, pois se fosse deste tipo ela admitiria uma recta unida pelo ponto Q_2, distinta da recta Q_1Q_2, a qual daria um ponto unido na intersecção com o plano β o que é absurdo. Precisadas as projectividades entre α e α' assim como entre β e β' fica definida no espaço uma homografia do tipo V, como queriamos demonstrar.

4.5 - <u>Construção de uma homografia do tipo X</u> - A decomposição (D) do espaço é aqui

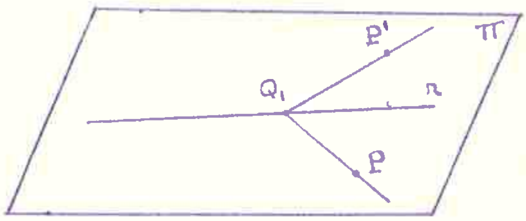
$$S_3 = F_3(Q_1)$$

sendo Q_1 o unico ponto unido.

Temos mais os seguintes espaços unidos $F_2(Q_1)$ e $F_1(Q_1)$ com as relações de pertinencia:

$$F_3(Q_1) \supset F_2(Q_1) \supset F_1(Q_1) \supset Q_1$$

Para maior comodidade indicaremos o plano



$F_2(Q_1)$ com a notação π e a recta $F_1(Q_1)$ com a notação r. Para introduzir dois planos que funcionarão como planos α e α' respectivamente, daremos mais um par de pontos correspondentes P e P' situados fora do plano π.

Suporemos, portanto, como plano α o plano r P, e como plano α' o r P'; β e β consideraremos coincidentes e confundidos com o plano π. Resta definir as projectividades entre α e α' por um lado e entre β e β' (superpostos) por outro lado. Como projectividade entre β e β' tomaremos uma projectividade que admita um unico ponto unido, seja o ponto Q_1 e cuja recta unida seja r. A projectividade entre α e α' dever ser escolhida de tal modo que a homografia estendida ao espaço aplicando o teorema A seja uma homografia do tipo X, isto é: com o unico ponto unido Q_1.

Esta homografia será do tipo indicado se admitir, como raio unido pelo ponto Q_1, somente o raio Q_1 r. Vamos, portanto, definir na estrela de centro em Q_1 uma projectividade que admita como raio unido somente o raio Q_1 r e plano unido o plano π, e que leve o raio Q_1 P no raio Q_1 P'. Para determinar esta projectividade será necessario dar mais um par de raios correspondentes. Estabelecida esta projectividade na estrela, aos raios situados no plano P r, corresponderão raios do plano P' r e em consequencia a fum feixe de centro em Q_1 no plano P r, um feixe projectivo ao primeiro de centro em Q_1 e no plano P' r.

Teremos, portanto, entre os planos P r e P'r uma correspondencia que leva o feixe de centro em Q_1 no feixe de centro Q_1 projectivo ao anterior, situado no segundo plano. Nessa correspondencia ao raio Q_1 P, corresponderá o raio Q_1 P' e o raio r será unido. A projectividade entre os planos α e α' estará determinada se fizermos o ponto P' corresponder ao ponto P e se tomarmos sobre o raio unido r a mesma projectividade subordinada à que impuzemos no plano π. A homografia no espaço, definida aplicando o teorema A é tal que dois raios pelo ponto Q_1 correspondentes, são raios correspondentes na projectividade que definimos na estrela de centro em Q_1.

Esta homografia não admitirá portanto raio unido pelo ponto Q_1, distinto do raio Q_1 r e, em consequencia, nenhum ponto unido, distinto do ponto Q_1.

Esta homografia admitindo um unico ponto unido será do tipo X.

SEGUNDA PARTE.

Geometria do grupo projectivo sobre a recta.

1.1 - Na segunda parte desta tese exporemos resultados de um estudo que tivemos a oportunidade de desenvolver quando estudavamos uma questão de análise.[º]

Julgamos oportuno introduzil-o nesta tese porque nele estudamos, sob um aspecto bem diverso do considerado na 1ª parte, um caso muito particular de homografia: as projectividades sobre uma recta.

Não é dificil indicar em poucas linhas o resultado deste estudo que é o de mostrar um aspecto metrico das transformações projectivas sobre a recta. Convem precisar: propriedades metricas que se apresentam aqui não são propriedades de nenhuma figura sobre à recta projectiva e sim do conjunto das transformações projectivas.

Este conjunto forma um espaço de tres dimensões pois tal é o numero de parametros essenciaes nas transformações projectivas sobre a recta cuja equação é

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}.$$

Nós não estudaremos este espaço referido as coordenadas $\frac{\alpha}{\delta}$, $\frac{\beta}{\delta}$ e $\frac{\gamma}{\delta}$ e sim considerando como coordenadas de um ponto (uma transformação projectiva sobre a

---

[º] Referimos à equação de Ricatti cuja relação com o grupo projectivo sobre a recta é conhecida. Por outro lado, essa equação é um caso particular de uma classe de equações chamadas de Lie-Vessiot cujo estudo nos foi sugerido pelo Prof. L. Fantappiè.

recta) os parametros canonicos[º] do grupo projectivo sobre a recta. Para obter a lei de multiplicação das transformações do grupo projectivo[ºº], referido aos parametros canonicos julgamos mais oportuno estabelecer as equações finitas do grupo adjunto[ººº] do grupo das transformações projectivas e deduzir a referida lei da composição de duas transformações deste grupo adjunto! Aliás, como veremos, não será necessario calcular completamente esta lei de composição.

1.2 - As transformações infinitesimas do grupo projectivo[ºººº] são as seguintes:

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad X_2 f = x\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad X_3 f = x^2 \frac{\partial f}{\partial x}.$$

As constantes de estrutura, que podem ser calculadas pela expressão

$$(X_i, X_j)\, f = \sum_{1}^{n}{}_{\ell}\, c_{ij}^{\ell}\, X_{\ell}\, f,$$

são no nosso caso:

[º] L. Bianchi: Lezioni sui gruppi finiti di trasformazioni - pg. 216 e seguintes.

[ºº] Diremos grupo projectivo subentendendo-se grupo projectivo sobre a recta.

[ººº] Bianchi: livro citado, pg. 219.

[ºººº] Bianchi: livro citado pg. 230 e seguintes.

$$
\begin{array}{lll}
c^1_{12} = 1 & c^2_{13} = 2 & c^2_{23} = 1 \\
c^1_{21} = -1 & c^2_{31} = -2 & c^2_{32} = -1 \\
c^2_{12} = 0 & c^1_{13} = 0 & c^1_{23} = 0 \\
c^3_{12} = 0 & c^3_{13} = 0 & c^2_{23} = 0 \\
c^2_{21} = 0 & c^1_{31} = 0 & c^1_{32} = 0 \\
c^3_{21} = 0 & c^3_{31} = 0 & c^2_{32} = 0
\end{array}
$$

$$c^1_{ii} = c^2_{ii} = c^3_{ii} = 0 \quad (i=1,2,3)$$

As equações finitas do grupo adjunto de um grupo de r parametros, cujas constantes de estrutura são c^{ℓ}_{ij}, são obtidas integrando[º] o sistema linear

$$\frac{de'_k}{dt} = \sum_{j,i}^{1 \dots n} c^k_{ij} \lambda_i e'_j$$

com as condições iniciaes

$$e'_k = e_k \quad \text{para} \quad t = 0.$$

A solução deste sistema, escrita com a notação do calculo das matrizes é:

$$e'_k = e^{t \sum_{1}^{n} \lambda_i c_i} e_j$$

sendo c_i a matriz $\left\| c^k_{ji} \right\|$ e _e_ a base neperiana.

As transformações do grupo adjunto são (nos

[º] Bianchi: livro citado pg. 230 e seguintes.

parametros canonicos λ_i):

$$e'_k = e^{\sum_1^n \lambda_i c_i} e_j,$$

isto é: uma substituição linear nas variaveis e_j cujo modulo é a matriz

$$D_\lambda = e^{\sum_1^n \lambda_i c_i}$$

Escreveremos, para maior comodidade:

$$\sum_1^n \lambda_i c_i = B_\lambda .$$

Devemos calcular a matriz e^{B_λ} e para este fim é muito oportuna a formula dada pelo Prof. L. Fantappiè,[º]

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\rho)}{\rho - A} d\rho \;.$$

No caso particular que nos interessa a matriz A é a matriz B e a função $f(\rho)$ é a função e^ρ.

Temos portanto:

$$D = e^B = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^\rho}{\rho - A} d\rho \;,$$

o caminho C sendo um caminho que encerra os pontos $0, \sqrt{\lambda_2^2 - 4\lambda_1\lambda_3}, -\sqrt{\lambda_2^2 - 4\lambda_1\lambda_3}$ que são as raizes

---

[º] L. Fantappiè: Comptes Rendus Acad. Sciences. Paris Vol. 186 (1928) pg. 619-621.

O. Catunda: Sobre as funções de funções de matrizes. Jornal de Matematica Pura e Aplicada. Vol. I - Fasciculo 2º-pg.21.

<u>caracteristicas</u> da equação caracteristica

$$(\lambda_2^2 - \rho^2 - 4\lambda_1 \lambda_3) = 0,$$

obtida igualando a zero a matriz caracteristica

$$B_\lambda - \rho I = 0,$$

I sendo a matriz identica.

Indicaremos, daqui por deante, a expressão

$$\sqrt{4\lambda_1 \lambda_3 - \lambda_2^2}$$

com a notação $\bar{\lambda}$.

Efectuando os calculos que são relativamente laboriosos e nos dispensaremos de reproduzil-os aqui vem

(ver pg. seguinte)

$$D_\lambda = \frac{1}{\bar{\lambda}^2} \begin{vmatrix} \bar{\lambda}^2 + (\lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_3)\gamma_\lambda + \lambda_2\delta_\lambda & -\lambda_1\lambda_2\gamma_\lambda - \lambda_1\delta_\lambda & 2\lambda_1^2\gamma_\lambda \\ 2\lambda_3\lambda_2\gamma_\lambda + 2\lambda_3\delta_\lambda & \bar{\lambda}^2 - 4\lambda_1\lambda_3\gamma_\lambda & 2\lambda_1\lambda_2\gamma_\lambda - 2\lambda_1\delta_\lambda \\ 2\lambda_3^2\gamma_\lambda & -\lambda_3\lambda_2\gamma_\lambda + \lambda_3\delta_\lambda & \bar{\lambda}^2 + (\lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_3)\gamma_\lambda - \lambda_2\delta_\lambda \end{vmatrix}$$

Na expressão da matriz D_λ introduzamos a seguinte notação

$$\gamma_\lambda = 1 - \cos \bar{\lambda} \qquad \delta_\lambda = \bar{\lambda} \operatorname{sen} \bar{\lambda} .$$

Podemos dar à matriz D_λ uma expressão bem mais elegante e expressiva que é a seguinte:

$$D_\lambda = I + \frac{\delta_\lambda}{\bar{\lambda}^2} B_\lambda + \frac{\gamma_\lambda}{\bar{\lambda}^2} B_\lambda^2 = e^{B_\lambda}$$

Nesta expressão temos:

$$B_\lambda = \begin{vmatrix} \lambda_2 & -\lambda_1 & 0 \\ 2\lambda_3 & 0 & -2\lambda_1 \\ 0 & \lambda_3 & -\lambda_2 \end{vmatrix}$$

Este calculo, independentemente do resultado a que nos conduzirá, parece-nos interessante e não conhecemos nenhum trabalho que o traga explicitamente.

1.3 - Como já o dissemos, para calcular a lei de multiplicação, utilisaremos o grupo adjunto, o qual sendo linear, será tal que o produto de duas de suas transformações terá como modulo o produto dos modulos das transformações componentes.

Indicaremos os parametros da transformação produto respectivamente com φ_1, φ_2 e φ_3 e nestes parametros escreveremos tambem $\bar{\varphi}$, γ_φ e δ_φ, definidos com $\bar{\lambda}$, γ_λ e δ_λ.

Para obter uma relação entre os parametros λ e μ com os parametros φ da transformação produto basta igualar o traço (soma dos elementos principaes) das duas matrizes

$$D_\lambda \cdot D_\mu \qquad e \qquad D_\varphi .$$

A matriz D sendo igual a

$$I + \frac{\delta_\varphi}{\bar\lambda^2} B_\lambda + \frac{\gamma_\lambda}{\bar\lambda^2} B_\lambda^2$$

teremos, indicando o traço da matriz D_φ com a notação $T(D_\varphi)$:

$$T(D_\varphi) = T(I) + \frac{\delta_\varphi}{\bar\lambda^2} T(B_\lambda) + \frac{\gamma_\lambda}{\bar\lambda^2} T(B_\lambda^2) =$$

$$= 1 + 2 \cos \bar\varphi ,$$

pois

$$T(B_\lambda) = 0 \qquad T(B_\lambda^2) = -2\bar\lambda^2.$$

Por outro lado:

$$D_\lambda D_\mu = (I + \frac{\delta_\lambda}{\bar\lambda^2} B_\lambda + \frac{\gamma_\lambda}{\bar\lambda^2} B_\lambda^2)(I + \frac{\delta_\mu}{\bar\mu^2} B_\mu + \frac{\gamma_\mu}{\bar\mu^2} B_\mu^2) =$$

$$= I + \frac{\delta_\mu}{\bar\mu^2} B_\mu + \frac{\gamma_\mu}{\bar\mu^2} B_\mu^2 + \frac{\delta_\lambda}{\bar\lambda^2} B_\lambda + \frac{\delta_\lambda \delta_\mu}{\bar\lambda^2 \bar\mu^2} B_\lambda B_\mu +$$

$$+ \frac{\delta_\lambda \gamma_\mu}{\bar\lambda^2 \bar\mu^2} B_\lambda B_\mu^2 + \frac{\gamma_\lambda \gamma_\mu}{\bar\lambda^2 \bar\mu^2} B_\lambda^2 B_\mu^2 .$$

Pondo

$$\bar\alpha = \lambda_2 \mu_2 - 2 \lambda_1 \lambda_3 - 2 \lambda_3 \mu_1,$$

é facil verificar que:

$$T(B_\lambda \; B_\mu) = 2\bar{\alpha}$$

$$T(B_\lambda \; B_\mu^2) = 0$$

$$T(B_\lambda^2 \; B_\mu) = 0$$

$$T(B_\lambda^2 \; B_\mu^2) = \bar{\lambda}\,\bar{\mu}^2 + \bar{\alpha}^2$$

Igualando o traço das duas matrizes D_φ e $D_\lambda \, D_\mu$ vem:

$$1 + 2 \cos \bar{\varphi} = 3 - 2\,\gamma_\lambda - 2\,\gamma_\mu +$$

$$+ \frac{1}{\bar{\lambda}\,\bar{\mu}^2}\left[2\,\bar{\alpha}\,\delta_\lambda\,\delta_\mu + \gamma_\lambda\,\gamma_\mu(\bar{\lambda}^2\bar{\mu}^2 + \bar{\alpha}^2)\right]$$

Substituindo δ_λ, δ_μ, γ_λ e γ_μ pelos seus valores em função de $\bar{\lambda}$ e $\bar{\mu}$ e simplificando a expressão vem:

$$\text{(A)} \qquad \cos\frac{\bar{\varphi}}{2} = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\lambda}\,\bar{\mu}} \operatorname{sen}\frac{\bar{\lambda}}{2} \operatorname{sen}\frac{\bar{\mu}}{2} + \cos\frac{\bar{\lambda}}{2}\cos\frac{\bar{\mu}}{2}$$

que é a relação procurada.

Pondo:

$$\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\lambda}\,\bar{\mu}} = \cos A$$

e utilisando a formula:

$$\cos\omega = \frac{\sum_{i,k} g_{ik}\,\lambda_i\,\lambda_k}{(\sum_{i,k} g_{ik}\,\lambda_i\,\lambda_k)(\sum g_{ik}\,\mu_i\,\mu_k)}$$

que dá o angulo de duas direções num espaço riemaniano podemos calcular as componentes do tensor métrico g_{ik}. A relação (A) mostra que o espaço das transformações projectivas sôbre a recta pode ser interpretado como um espaço métrico. O fator $\frac{1}{2}$ está em relação com a curvatura do espaço.

1.4 - Os cálculos desenvolvidos nos numeros anteriores são um caso particular da Geometria dos Grupos de Transformações, teoria esta creada e desenvolvida por E. Cartan e J. A. Schouten. [o]

Esta teoria é muito extensa: em particular, ela mostra que o espaço de um grupo simples (o grupo projectivo sôbre a recta é um grupo simples) é um espaço riemanniano. A teoria, aplicada ao caso por nós desenvolvido, dá resultados coincidentes (ver Cartan, trabalho citado pg. 69). Preferimos conservar os nossos cálculos e raciocinios na forma em que surgiram, sem procurar adaptal-os ao metodo geral de Cartan. Em trabalho futuro pretendemos completar o que foi aqui esboçado - em particular tratar da questão do paralelismo, das geodeticas e da natureza, em grande, desse espaço. Outra questão é a generalisação do metodo seguido às outras classes de grupos simples.

---

[o] Cartan: La Géométrie des groupes des transformations - Journal de Mathématiques pures et Appliquées - Tome Sixième - Année 1927.

Schouten: Kontinuirliche Transformations gruppen. Mathematische Annalen (1929).